Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGAR

SVAR OCH ANVISNINGAR

VERSION 1.1

1. $P(x) = (x+1)^2 = 0$ om och endast om $x = -1$. Detta enda nollställe har multipliciteten två. Eftersom $(x+1)^2 \geq 0$ för alla x avbildar polynomet den reella tallinjen på den icke-negativa delen av tallinjen.

2. Enligt kvadratreglerna är $P(x) = a^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ och $Q(x) = (x-1)^2$. $P(x)$ har därför nollstället -1 av multipliciteten två och $Q(x)$ nollstället 1 också av multipliciteten två.

3. $P(x) \geq 4$ för alla x och har inga nollställen.
   $P(x) = x^2 - 4$ har nollställena $\pm\sqrt{4} = \pm 2$ av multipliciteten ett.

4. a) $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 5 - 4 = (x+2)^2 + 1$. Detta polynom är alltid större än noll för alla x. Det finns inga nollställen.

   b) $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 + 4 - 4 = (x+2)^2$. Polynomet har nollstället $x = -2$ av multipliciteten två.

   c) $x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 + 3 - 4 = (x+2)^2 - 1$. Nollställena bestäms ur villkoret $(x+2)^2 - 1 = 0$ som har lösningarna $x + 2 = \pm 1$. Polynomet har alltså nollställena $x = -1$ och $x = -3$ av multipliciteten ett.

5. Det snabbaste sättet att finna det andra nollstället torde vara att använda sambandet mellan nollställen och koefficienter. Eftersom $x_1 = 1$ så har vi $1 \cdot x_2 = 23$. Man kan förstås också använda att $1 + x_2 = 24$.

6. Polynomet $x^3 + 3x^2 - x - 3$ har nollstället $x_1 = -1$. Vi kan då faktorisera:

   $$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x+1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A+1)x^2 + (B+A)x + B.$$

   Identifiering av koefficienterna (detta är divisionsalgoritmen!) ger då successivt

   $$A + 1 = 3, \quad B + A = -1, \quad B = -3.$$

   Vi finner

   $$A = 2,\ B = -3.$$

   De tre villkoren är konsistenta vilket garanteras av faktorsatsen.

Alltså har vi funnit

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 1)(x^2 + 2x - 3).$$

Polynomet $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 3 - 1 = (x + 1)^2 - 4$ har nollställena $x_2 = 1$ och $x_3 = -3$. Tredjegradspolynomet kan alltså faktoriseras som

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x + 1)(x - 1)(x + 3).$$

Nollställena $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ samt $x_3 = -3$ är samtliga enkla nollställen.

7. $z^2 + 2z + 5 = (z + 1)^2 + 5 - 1 = (z + 1)^2 + 4$. Nollställena är $z = -1 \pm 2i$.

8. $z^2 + 2iz + 1 = (z + i)^2 + 1 - i^2 = (z + i)^2 + 2$. $(z + i)^2 + 2 = 0$ ger villkoret $(z + i)^2 = -2$, dvs $z + i = \pm i\sqrt{2}$. Nollställena är alltså $z = -i \pm i\sqrt{2} = -i(1 \pm \sqrt{2})$.

9. $z^3 + z^2 + z + 1 = z^2(z + 1) + (z + 1) = (z + 1)(z^2 + 1)$. Nollställena är $z = -1$ och $z = \pm i$.