ALGEBRA ML ÖVNINGSTENTAMEN 1

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.

1. Lös ekvationssystemen med Gauss elimination.

   a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 2 \end{cases}$$

   b)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 2 \end{cases}$$

   c)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 3 \end{cases}$$

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 2 \end{cases}$$
   genom att först beräkna systemets inversa matris.

3. Bestäm ekvationerna på vektorform för den räta linje i planet som går genom punkterna $(1, 1)$ och $(2, 2)$. Avgör sedan om punkten $(-1, 1)$ ligger på linjen eller inte.

4. Ge ekvationen på parameterform för planet $x + y + z = 0$.

5. Låt

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Visa att

$$z^2 = \begin{bmatrix} a^2 - b^2 \\ 2ab \end{bmatrix},$$

dvs är en vektor i planet med koordinaterna

$$(a^2 - b^2, 2ab),$$

genom att utnyttja skrivsättet $z = a+bi$. Använd de räknelagar som gäller då ett komplext tal skrivs på detta klassiska sätt.

6. Låt

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vara en given vektor. Visa att det finns precis två vektorer $z$ sådana att $z^2 = w$.

**Ledning**: Ansätt

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

där $x$ och $y$ är reella tal och bestäm dessa så att $z^2 = w$.

7. Finn de eventuella reella nollställena och deras multiplicitet till polynomen

a) $P(x) = x^2 + 2x + 2$ b) $P(x) = x^2 + 2x + 1$ c) $P(x) = x^2 + 2x$.

Använd gärna kvadratkomplettering.

8. Polynomet $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ har nollstället $x_1 = -1$. Bestäm samtliga nollställen, även eventuella komplexa sådana.