Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. a) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. b) $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = t$. c) Systemet saknar lösningar

Lösningar till problem 1.

2.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1.$$

Ekvationssystemet har alltså precis en lösning. Enligt formeln för matrisinversen för en $2 \times 2-$matris får vi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

och lösningen blir

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dvs $x_1 = 1, x_2 = -1$ är lösningen till ekvationssystemet.

3. Som riktningsvektor kan vi välja

$$\begin{bmatrix} 2-1 \\ 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Som punkten $(x_0, y_0)$ kan vi välja välja $(1, 1)$. Ekvationerna på vektorform blir då

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Punkten $(-1, 1)$ ligger på linjen om det finns något värde på parametern $t$ för vilket

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Detta är ett ekvationssystem med en obekant och två ekvationer som saknar lösningar. Punkten $(-1, 1)$ ligger alltså inte på linjen.

4. $x + y + z = 0$ är ett ekvationssystem med en ekvation och tre obekanta.

   Den är redan på radkanonisk form där $x-$termen är pivotelement. Vi väljer därför $y = t$ och $z = s$ som fria varaiabler och får lösningarna

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t - s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Då man använder skrivsättet $z = a + bi$ är $a$ och $b$ reella tal och $i$ är en symbol som uppfyller $i^2 = -1$. Kommutativa och distributiva lagarna gäller som vid räkning med reella tal och vi erhåller därför $(a + bi)^2 = a^2 + (bi)^2 + 2abi = a^2 - b^2 + 2abi$ som är en vektor i planet med koordinaterna $(a^2 - b^2, 2ab)$.

6. Vi låter

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

   Då blir

   Låt

$$z^2 = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$$

   som skall vara lika med

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Vi får därför ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 0 \\ \quad 2xy & = 1 \end{cases}.$$

   Om vi t ex löser ut $y = \dfrac{1}{2x}$ och sätter in detta i den första ekvationen får vi

$$x^4 - \frac{1}{4} = 0.$$

   Detta är en andragradsekvation i $x^2$ och vi får

$$x^2 = \pm\frac{1}{2}.$$

   Minustecknet ger ett högerled som är mindra än noll och alltså inga lösningar. Plustecknet ger positivt högerled och vi får precis två lösningar för det reella talet $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Insättning i $2xy = 1$ av vardera $x-$värdet ger $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ och vi får slutligen de två lösningarna

$$z_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$z_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Man kan också skriva de komplexa talen på formen

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,1\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

7. a) $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 2 - 1 = (x+1)^2 + 1$. Detta polynom är alltid större än noll för alla $x$. Det finns inga reella nollställen.

   b) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 + 1 - 1 = (x+1)^2$. Polynomet har nollstället $x = -1$ av multipliciteten två.

   c) $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$. Nollställena bestäms ur villkoret $(x+1)^2 - 1 = 0$ som har lösningarna $x + 1 = \pm 1$. Polynomet har alltså nollställena $x = 0$ och $x = -2$ av multipliciteten ett. Vi kan också enkelt se detta genom att bryta ut $x$, dvs skriva $x^2 + 2x = x(x+2)$.

8. Polynomet $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ har nollstället $x_1 = -1$. Vi kan då faktorisera:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + Ax + B) = x^3 + (A+1)x^2 + (B+A)x + B.$$

Identifiering av koefficienterna (detta är divisionsalgoritmen!) ger då successivt

$$A + 1 = 2, \quad B + A = 2, \quad B = 1.$$

Vi finner

$$A = 1,\ B = 1.$$

De tre villkoren är konsistenta vilket garanteras av faktorsatsen.

Alltså har vi funnit

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1).$$

Polynomet $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Vi finner de komplexa nollställena

$$x_2 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$