

ALGEBRA ML ÖVNINGSTENTAMEN 2

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.

1. Lös ekvationssystemet $x_2 - x_3 = 1$.

2. Vad är

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}?$$

Vad är arean av den parallelogram som spänns av kolonnerna i matrisen? Hur ska vi ange arean om vi får en negativ determinant?

b) Med hjälp av resultatet i a) kan man direkt avgöra vilka lösningarna är till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}.$$

Vad kan det vara för resonemang som ligger bakom detta påstående?

3. Ge ekvationen för planet nedan på formen $Ax + By + Cz + D = 0$ genom att betrakta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

som ett ekvationssystem i t och s och bestämma villkoren på x, y, z för att ekvationssystemet ska ha lösningar.

4. Beräkna avståndet från punkten $(2, 2)$ till linjen $x + y = 2$.

5. Låt z vara ett komplext tal, dvs vektorn

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

som vi även kan skriva $z = a + bi$, vilket är det klassiska skrivsättet. Säg att z bildar vinkeln θ med x -axeln. Vilken vinkel bildar z^2 med x -axeln. Hur lång är vektorn z^2 uttryckt i a och b ?

6. Om

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

så är

$$z^3 = \begin{bmatrix} a^3 - 3ab^2 \\ 3a^2b - b^3 \end{bmatrix}.$$

Låt nu

$$w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Visa genom att använda ovanstående resultat att det finns precis tre vektorer z sådana att $z^3 = w$.

Ledning: Ansätt

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

där x och y är reella tal och bestäm dessa så att $z^3 = w$.

7. Visa att polynomet

$$P(z) = z^2 + z + 1$$

har komplexa nollställen och ange dessa på formen $a + bi$.

8. Visa att polynomet

$$P(z) = z^2 + 2iz - 1$$

har komplexa nollställen och ange dessa på formen $a+bi$. Vilken multiplicitet har nollställena?