Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 2

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. Variabeln x_1 finns inte med så den är fri och vi sätter $x_1 = s$. Den obekanta x_2 är pivotelement och väljes inte som fri variabel. Vi ska istället välja x_3 som fri variabel och sätter $x_3 = t$. Lösningarna är alltså $x_1 = s, x_2 = 1 + t, x_3 = t$.

2. a)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1.$$

Arean av parallellogrammen är alltså lika med 1. Om vi hade fått ett negativt värde, t ex -1, skulle vi ha svarat med det posititiva talet $+1$.

b) Ett kvadratiskt ekvationssystem har precis en lösning då determinanten av systemets matris är skild från 0. Vårt system har alltså nollskild determinant och har alltså precis en lösning. Denna måste då vara $x_1 = x_2 = 0$ som man omedelbart ser är en lösning (den triviala lösningen) till systemet

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & +4x_2 & = & 0 \end{cases} .$$

3. Vi ska studera ekvationssystemet

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

med de obekanta t och s.

Gauss elimination ger först

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z - x \end{bmatrix}$$

och därefter

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z - x + y \end{bmatrix}.$$

Villkoret för att ekvationssystemet ska ha lösningar är att $z - x + y = 0$ i tredje ekvationen. Planet har alltså ekvationen $x - y - z = 0$ på parameterfri form.

4. Normalen har riktningsvektorn

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och går genom punkten

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normalen har därför ekvationen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi söker skärningspunkten mellan normalen och den givna linjen. Denna punkt får vi genom att sätta in normalens koordinater i linjens ekvation. Detta ger $(2+t)+(2+t)=2$ dvs $t=-1$. Detta parametervärde ger punkten $(1,1)$ på normalen och denna punkt ligger samtidigt på den givna linjen. Avståndet från punkten $(2,2)$ till linjen är alltså avståndet mellan $(2,2)$ och $(1,1)$. Vi finner att detta avstånd är $\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$.

5. $z^2 = z\,z$ bildar vinkeln $\theta + \theta = 2\theta$ med $x-$axeln. Längden av z^2, dvs $|z^2| = |z||z| = \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a^2+b^2} = a^2+b^2$.

6. Genom att använda resultatet får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 & = 0 \\ 3x^2y - y^3 & = 1 \end{cases}.$$

Den första ekvationen ger $x^3 - 3xy^2 = x(x^2-3y^2) = 0$. Detta ger $x=0$ eller $x^2 = 3y^2$. Om vi sätter in $x=0$ i den andra ekvationen får vi $-y^3 = 1$. Här är y ett reellt tal och den enda reella lösningen till $-y^3 = 1$ är $y=-1$. (En motivering för detta är att y^3 som funktion av en reell variabel är strikt växande och därför bara kan anta värdet -1 en enda gång).

Vi har alltså funnit en lösning

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sätter vi nu in $x^2 = 3y^2$ i den andra ekvationen får vi $3 \cdot 3y^2\,y - y^3 = 1$ som vi kan förenkla till

$$y^3 = \frac{1}{8}.$$

Denna ekvation har den enda lösningen $y = \frac{1}{2}$. Sätter vi in detta i $x^2 = 3y^2$ får vi $x^2 = \frac{3}{4}$

med lösningarna $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Därmed har vi också funnit de båda lösningarna

$$z_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad z_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Vi kan också ange vektorerna på formen

$$z_0 = -i,\ z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad \text{och} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

där vi använt det klassiska skrivsättet för vektorer i planet då de betraktas som komplexa tal.

7. $z^2 + z + 1 = (z + \frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = (z + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Nollställena är $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. $z^2 + 2iz - 1 = (z+i)^2 - 1 + 1 = (z+i)^2$. Villkoret $(z+i)^2 = 0$ ger $z + i = 0$ som enda lösning, dvs $z = -i$. Nollstället är av multipliciteten två (dubbelt nollställe) eftersom det är $(z+i)^2 = 0$.