ALGEBRA ML ÖVNINGSTENTAMEN 3

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.

1. Använd Gauss elimination för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & & = & 2 \\ & x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & & +x_3 & = & 2 \end{cases}$$

2. Produkten av två $2 \times 2-$matriser definieras enligt rad-kolonn regeln på följande sätt

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

   Låt

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Beräkna BC samt CB.

3. Bestäm den räta linjen $2x + 3y = 6$ på parameterform.
4. Beräkna avståndet från punkten $(-2, -1)$ till linjen $2x + 3y = 6$.
5. Låt

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Här betraktar vi också w som det komplexa talet $w = 1$.

   Visa med en **geometrisk** motivering att det finns fyra vektorer z sådana att $z^4 = w$, där vi alltså betraktar också z som komplext tal. Rita in dessa z i det komplexa talplanet.

   Ledning: Om vinkeln mellan z och x-axeln är θ så är vinkeln mellan z^4 och $x-$axeln lika med 4θ. Uppgiften består i att finna de vinklar θ för vilka 4θ är en heltalsmultipel av $360°$, inklusive $0°$.

6. Ekvationen $z^4 = 1$ kan lösas geometriskt enligt problem 5. Lös också ekvationen algebraiskt genom att dela upp den i de två fallen $z^2 = \pm 1$. Använd sedan resultatet och faktorsatsen för att skriva $z^4 - 1$ som en produkt av polynom av första graden.
7. Polynomet $x^3 - x^2 - x + 1$ har nollstället $x_1 = 1$. Bestäm samtliga reella nollställen.
8. Lös ekvationen $z^2 = 1 + 2i\sqrt{2}$. Lösningarna ska anges på formen $a + bi$ där a och b är reella tal.

   Ledning: Ansätt $z = x + iy$ där x och y är reella tal. Då är $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.