Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, M Eriksson

Tentamen del 1
ANALYS MN1
2006-12-16

Tentamen består av två delar. Del 1 omfattar 10 FRÅGOR(max 1 poäng per fråga) samt 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem). Fullständiga lösningar fordras för både frågorna och problemen. Del 2 består av 1 TEORIFRÅGA (max 5 poäng) samt 3 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. 18 poäng ger godkänt, 28 poäng väl godkänt. **Skrivtid:** 9.00-14.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är $\displaystyle\int_0^\infty x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\,$?
2. Vad är $\displaystyle\int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx\,$?
3. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$?
4. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$?
5. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'' - y = 0$ om $y(0) = 1$, $y'(0) = 0\,$?
6. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'' + y = 1$ om $y(0) = 1$, $y'(0) = 0\,$?
7. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y' + \dfrac{1}{x+1}\, y = 1$ om $y(0) = 1\,$?
8. Vad är summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{1}{e})^n$?
9. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n$ har konvergensradien 1. För vilka x konvergerar serien?
10. Maclaurins serie av $\displaystyle\int_0^x (\tan^{-1} t)\, dt$ är $a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \dots$. Vad är $a_2\,$?

PROBLEM

1.
$$f(x) = x - \frac{1}{x^2}$$

Bestäm definitionsmängden, eventuella vertikala och sneda asymptoter samt lokala extrempunkter. Skissera kurvan.

2.
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bevisa att x-axeln är tangent till kurvan i origo. Bestäm eventuella vertikala asymptoter, lokala extrempunkter och inflexionspunkter. Skissera kurvan.

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, J Björklund, V Chapovalova

Tentamen del 2
ANALYS MN1
2006-12-16

TEORIFRÅGA

1. Formulera analysens fundamentalsats (båda delarna).

(5p)

PROBLEM

2. En serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar. Låt $0 < r < 1$. Följer det att serien $\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n$ är konvergent?

(5p)

Om du har gjort muntan och fått G eller VG på den ska du hoppa över uppgift 3.

3. Är följande serie konvergent eller divergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Om den är konvergent, bestäm dess värde.

(5p)

Om du har gjort muntan och fått VG på den ska du hoppa över uppgift 4.

4. a) Låt $f(x), g(x)$ vara kontinuerliga funktioner definierade på $[0,1]$. Visa att

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = 0 \iff f(x) = g(x)\ \forall\, x \in [0,1].$$

(3p)

b) Gäller detta även för funktioner som inte är kontinuerliga på $[0,1]$?

(2p)

Trigonometriska formler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\sin x \sin y = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2$
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	$\sin x \cos y = (\sin(x + y) + \sin(x - y))/2$
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\cos x \cos y = (\cos(x + y) + \cos(x - y))/2$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\,x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!}\,x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$