Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson, M Eriksson

Tentamen del 1
ANALYS MN1
2007-01-15

Tentamen består av två delar. Del 1 omfattar 10 FRÅGOR(max 1 poäng per fråga) samt 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem). Fullständiga lösningar fordras för både frågorna och problemen. Del 2 består av 2 TEORIFRÅGOR (max $2+3$ poäng) samt 3 PROBLEM (max 5 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. 18 poäng ger godkänt, 28 poäng väl godkänt. **Skrivtid:** 8.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

FRÅGOR

1. Vad är $\displaystyle\int_0^{\infty} 3\,x^2\,e^{-x^3}\,dx\,?$
2. Vad är $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin x\,dx\,?$
3. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,?$
4. Vad är $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\,?$
5. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y''-y=0$ om $y(0)=0,\, y'(0)=1\,?$
6. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y''+y=1$ om $y(0)=0,\, y'(0)=1\,?$
7. Vilken är lösningen till differentialekvationen $y'-\dfrac{1}{x+1}\,y=x+1$ om $y(0)=0\,?$
8. Vad är summan av serien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{3})^n\,?$
9. Potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,x^n$ har konvergensradien 1. För vilka x konvergerar serien?
10. Maclaurins serie av $\displaystyle\int_0^x(\sin^{-1}t)\,dt$ är $a_0+a_1\,x+a_2\,x^2+\ldots.$ Vad är $a_2\,?$

PROBLEM

1.

$$f(x) = x + \frac{2}{(1+x)^2}$$

Bestäm definitionsmängden, de vertikala och sneda asymptoterna samt respektive x-koordinat för de eventuella lokala extrempunkterna. Skissera kurvan.

2.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\ln|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bevisa att x-axeln är tangent till kurvan i origo. Bestäm de vertikala asymptoterna samt respektive x-koordinat för de eventuella lokala extrempunkterna. Skissera kurvan.

Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
H Avelin, J Björklund, V Chapovalova

Tentamen del 2
ANALYS MN1
2007-01-15

TEORIFRÅGOR

1. Ge den formella definitionen av konvergens av en serie.

(2p)

2. Formulera integraltestet för konvergens av en serie och förklara i ord och bild.

(3p)

PROBLEM

3. Visa att det finns ett a så att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax) - \ln(1+x)}{\cos(\pi x) - 1}$$

existerar.

Bestäm a och gränsvärdet.

(5p)

Om du har gjort muntan och fått G eller VG på den ska du hoppa över uppgift 4.

4. Låt

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \quad , \quad |x| < 1,$$
$$g(x) = \arctan\left(\frac{1+2x}{2-x}\right) \quad , \quad |x| < 1.$$

Visa att $f(x) - g(x) = C$ där C är en konstant. Bestäm C.

(5p)

Om du har gjort muntan och fått VG på den ska du hoppa över uppgift 5.

5. Konvergerar eller divergerar serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$? Motivera noggrant.

(5p)

Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin x \sin y = (\cos(x-y) - \cos(x+y))/2$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \sin x \cos y = (\sin(x+y) + \sin(x-y))/2$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \cos x \cos y = (\cos(x+y) + \cos(x-y))/2$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1 < x \leq 1)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$