Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $|x-2|=3$ är ekvivalent med $x=2-3$ eller $x=2+3$, dvs rötterna till ekvationen är $x=-1$ samt $x=5$.

Figur till problem 1.

2. Eftersom ordningen inte spelar någon roll handlar problemet om hur många kombinationer det finns av två element valda ur fyra element. Detta antal är

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{(4-2)!2!}=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 2}=3\cdot 2=6.$$

Här är alla kombinationerna!

$$\begin{gathered}\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\\ \{2,3\},\{2,4\}\\ \{3,4\}.\end{gathered}$$

3. $x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$. Eftersom x^2+1 saknar reella nollställen har polynomet endast nollstället $x=1$.

4. Vi förlänger med nämnarens konjugat $1-i$.

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-i)^2}{1+1}=\frac{1-2i+i^2}{2}=-i.$$

Man kan också räkna ut kvoten med hjälp av rutan på sidan A-8 i Adams.

Se figur till problem 4.

5. Notera särskilt att $-1\le\sin\frac{\pi}{2}x\le 1$.

Se figur till problem 5.

6. Graferna av $y = e^x$ och $y = \ln x$ finns i Figur 3.13 i Adams. Om $\ln x = 2$ följer av Cancellation Identities att
$$x = e^{\ln x} = e^2.$$
Cancellation Identities: $e^{\ln x} = x, \quad \ln e^x = x.$

7. Lutningen m (**slope**) av linjen är
$$m = \frac{-2-4}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3.$$
Linjens ekvation (**point-slope equation**) är då t ex
$$y = -3(x-1) + 4 = -3x + 7.$$
Punkten $(2,1)$ ligger på linjen för om vi sätter $x = 2$ i ekvationens högerled så får vi $y = 1$.

Se figur till problem 7.

8. Adams använder här kvadratkomplettering på x-variabeln respektive y-variabeln i vänsterledet av ekvationen
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2.$$
Denna kvadratkomplettering ger
$$((x-1)^2 - 1) + ((y-1)^2 - 1) = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 2.$$
Ekvationen kan alltså skrivas
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 - 2 = 2,$$
dvs
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4.$$
Detta är en cirkel med centrum i $(1,1)$ och radien lika med $\sqrt{4} = 2$.

9. Vi antar att serien gäller för något heltal n, dvs att

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2 \text{ (Induktionsantagandet)}$$

Vi ska då visa att

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots n \cdot (3n+1) + (n+1) \cdot (3n+4) = (n+1)(n+2)^2 \text{ (Formeln för } n+1\text{)}$$

Med hjälp av induktionsantagandet kan vi skriva vänster led i Formeln för $n+1$ på följande sätt

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots n \cdot (3n+1) + (n+1) \cdot (3n+4) =$$
$$= n \cdot (n+1)^2 + (n+1) \cdot (3n+4) = (n+1) \cdot [n(n+1) + 3n + 4] =$$
$$= (n+1) \cdot (n^2 + 4n + 4) = (n+1)(n+2)^2.$$

Nu återstår bara att verifiera formeln för $n = 1$. Vi finner att vänster led är lika med $1 \cdot 4 = 4$ som är lika med höger led $1 \cdot 2^2 = 4$. Eftersom formeln stämmer för $n = 1$ stämmer den nu för alla positiva heltal enligt induktionsaxiomet.

10. Vi väljer här att använda teorin för komplexa rötter på sidan A-8 ff. Eftersom $|-1|^{\frac{1}{3}} = 1$ och $\arg(-1) = \pi$ så är den principala tredjeroten

$$w_1 = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De övriga tredjerötterna ligger på en liksidig triangel inskriven i en cirkel med centrum i origo och ett hörn i $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. De övriga rötterna är $w_2 = -1$ samt $w_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se figur till problem 10.