Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 2

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $|x+2| = 3$ är ekvivalent med $x = -2-3$ eller $x = -2+3$, dvs rötterna till ekvationen är $x = -5$ samt $x = 1$. Den punkt som har samma avstånd till $-5$ och $1$ är mittpunkten på sträckan $-5 \le x \le 1$, dvs $-2$.

2. Eftersom ordningen inte spelar någon roll handlar problemet om hur många kombinationer det finns av tre element valda ur fem element. Detta antal är
$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 3\cdot 2} = 10.$$
Här är alla kombinationerna!
$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\}$$
$$\{1,3,4\},\{1,3,5\}$$
$$\{1,4,5\}$$
$$\{2,3,4\},\{2,3,5\}$$
$$\{2,4,5\}$$
$$\{3,4,5\}$$

3. $(x^2-1)(x-1) = (x+1)(x-1)(x-1) = (x+1)(x-1)^2$. Polynomet har alltså nollstället $x = -1$ av multipliciteten ett och nollstället $x = 1$ av multiplicitet två.
Begreppet multiplicitet behandlas i Adams på sidan 41ff.

4. Vi förlänger med nämnarens konjugat $1-i$.
$$\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(i-i^2}{1+1} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$
Man kan också räkna ut kvoten med hjälp av rutan på sidan A-8 i Adams.

Se figur till problem 4.

5. Notera särskilt att $-1 \le \sin x \le 1$. Grafen av $\sin x$ finns i Adams, Figur P.78.
$\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ har rötterna $x = \dfrac{\pi}{4}$ och $x = \dfrac{3\pi}{4}$ samt rötterna
$x = \dfrac{\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{4}$ och $x = \dfrac{3\pi}{4} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{4}$ i intervallet $-2\pi \le x \le 2\pi$.

6. Graferna av $y = e^x$ och $y = \ln x$ finns i Figur 3.13 i Adams. Om $\ln x = -1$ följer av Cancellation Identities att
$$x = e^{\ln x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$
Cancellation Identities: $e^{\ln x} = x, \quad \ln e^x = x.$

7. Lutningen $m$ (**slope**) av linjen är
$$m = \frac{3-1}{2-4} = -1.$$
Linjens ekvation (**point-slope equation**) är då t ex
$$y = -(x-4) + 1 = -x + 5.$$
Punkten $(5, 0)$ ligger på linjen för om vi sätter $x = 5$ i ekvationens högerled så får vi $y = 0$.

8. Ekvationen betyder en ellips som skär $x-$axeln i punkterna $\pm 2$ och $y-$axeln i punkterna $\pm 1$.

Se figur till problem 8.

9. Vi antar att serien gäller för något heltal $n$, dvs att

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ (Induktionsantagandet)}$$

Vi ska då visa att

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6) \text{ (Formeln för } n+1)$$

Med hjälp av induktionsantagandet kan vi skriva vänster led i Formeln för $n+1$ på följande sätt

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)] = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6).$$

Nu återstår bara att verifiera formeln för $n = 1$. Vi finner att vänster led är lika med $1$ som är lika med höger led. Eftersom formeln stämmer för $n = 1$ stämmer den nu för alla positiva heltal enligt induktionsaxiomet.

10. Vi väljer här att använda teorin för komplexa rötter på sidan A-8 ff. Eftersom $|1|^{\frac{1}{3}} = 1$ och $\arg(1) = 0$ så är den principala tredjeroten

$$w_1 = 1.$$

De övriga tredjerötterna ligger på en liksidig triangel inskriven i en cirkel med centrum i origo och ett hörn i $1$. De övriga rötterna är $w_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ samt $w_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se figur till problem 10.