Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 3

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $|x-1| \leq 3$ är ekvivalent med $1-3 \leq x \leq 1+3$, dvs $-2 \leq x \leq 4$. Den punkt som har samma avstånd till -2 och 4 är mittpunkten på sträckan $-2 \leq x \leq 4$, dvs $x = 1$.

   Se figur till problem 1.

2. Den första siffran kan väljas på n olika sätt. För varje val av första siffra kan den andra väljas på n olika sätt. Totala antalet sätt att välja siffror blir därför enligt multiplikationsprincipen $n \cdot n = n^2$. För varje val av siffror kan den första bokstaven väljas på m olika sätt och för varje val av siffror och första bokstav kan den andra bokstaven väljas på m olika sätt. Totala antalet skyltar blir därför $n^2 \cdot m^2$. Då $n = m = 2$ blir antalet skyltar $2^2 \cdot 2^2 = 16$. Dessa är

$$\{1,1,A,A\},\{1,1,A,B\},\{1,1,B,A\},\},\{1,1,B,B\}$$
$$\{1,2,A,A\},\{1,2,A,B\},\{1,2,B,A\},\},\{1,2,B,B\}$$
$$\{2,1,A,A\},\{2,1,A,B\},\{2,1,B,A\},\},\{2,1,B,B\}$$
$$\{2,2,A,A\},\{2,2,A,B\},\{2,2,B,A\},\},\{2,2,B,B\}.$$

3. $(x-1)(x^2-2x+1) = (x-1)\cdot(x-1)^2$. Polynomet har alltså nollstället $x = 1$ av multipliciteten tre.

   Begreppet multiplicitet behandlas i Adams på sidan 41ff.

4. Vi förlänger med nämnarens konjugat $1+i$.

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(i+i^2}{1+1} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

   Man kan också räkna ut kvoten med hjälp av rutan på sidan A-8 i Adams.

   Se figur till problem 4.

5. Notera särskilt att $-1 \leq \cos\frac{\pi}{2}x \leq 1$.

   Se figur till problem 5.

6. Graferna av $y = e^x$ och $y = \ln x$ finns i Figur 3.13 i Adams. Om $\ln x = -2$ följer av Cancellation Identities att
$$x = e^{\ln x} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$
Cancellation Identities: $e^{\ln x} = x, \quad \ln e^x = x.$

7. Lutningen m (**slope**) av linjen är
$$m = \frac{3-1}{2-4} = -1.$$
Linjens ekvation (**point-slope equation**) är då t ex
$$y = -(x-4) + 1 = -x + 5.$$
Skärningen med y-axeln erhålles då $x = 0$ och är alltså enligt linjens ekvation $y = 5$, dvs $b = 5$.

8. Ekvationen betyder en hyperbel som skär $x-$axeln i punkterna ± 1 och som har asymptoterna $x - y = 0$ och $x + y = 0$.

Se figur till problem 8.

9. Vi antar att serien gäller för något heltal n, dvs att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}\ \text{(Induktionsantagandet)}$$

Vi ska då visa att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}\ \text{(Formeln för } n+1\text{)}$$

Med hjälp av induktionsantagandet kan vi skriva vänster led i Formeln för $n+1$ på följande sätt

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}.$$

Nu återstår bara att verifiera formeln för $n=1$. Vi finner att vänster led är lika med $\frac{1}{2}$ som är lika med höger led. Eftersom formeln stämmer för $n=1$ stämmer den nu för alla positiva heltal enligt induktionsaxiomet.

10. Vi väljer här att använda teorin för komplexa rötter på sidan A-8 ff. Eftersom $|i|^{\frac{1}{3}}=1$ och $\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ så är den principala tredjeroten

$$w_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}.$$

De övriga tredjerötterna ligger på en liksidig triangel inskriven i en cirkel med centrum i origo och ett hörn i w_1. De övriga rötterna är $w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ samt $w_3=-i$.

Se figur till problem 10.