Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 4

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $|x-1| \geq 3$ är ekvivalent med $x \geq 1+3$ eller $x \leq 1-3$, dvs $x \geq 4$ eller $x \leq -2$.

   Se figur till problem 1.

2. Eftersom vi väljer element ur en mängd är alla elementen olika. Då ordningen inte spelar någon roll handlar problemet till att börja med om hur många kombinationer det finns av tre element valda ur fyra element samt hur många kombinationer det finns av två element valda ur tre. Detta antal är

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

   respektive

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3.$$

   Enligt multiplikationsprincipen är totala antalet givar lika med $4 \cdot 3 = 12$.

   Här är alla givarna!

$$\begin{gathered}\{1,2,3,A,B\},\{1,2,4,A,B\},\{1,3,4,A,B\},\},\{2,3,4,A,B\}\\ \{1,2,3,A,C\},\{1,2,4,A,C\},\{1,3,4,A,C\},\},\{2,3,4,A,C\}\\ \{1,2,3,B,C\},\{1,2,4,B,C\},\{1,3,4,B,C\},\},\{2,3,4,B,C\}.\end{gathered}$$

3. $(x+1)(x^2+2x+1) = (x+1)\cdot(x+1)^2 = (x+1)^3$. Polynomet har alltså nollstället $x=-1$ av multipliciteten tre.

   Begreppet multiplicitet behandlas i Adams på sidan 4ff.

4. Vi förlänger med nämnarens konjugat $-i$.

$$\frac{1+i}{i} = \frac{-i(1+i)}{-i \cdot i} = \frac{1-i}{1} = 1-i.$$

   Man kan också räkna ut kvoten med hjälp av rutan på sidan A-8 i Adams.

   Se figur till problem 4.

5. Notera särskilt att $-1 \leq \cos x \leq 1$.

   Se figur till problem 5.

6. Graferna av $y = e^x$ och $y = \ln x$ finns i Figur 3.13 i Adams. Om $\ln x = \dfrac{1}{2}$ följer av Cancellation Identities att
$$x = e^{\ln x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$
Cancellation Identities: $e^{\ln x} = x, \quad \ln e^x = x.$

7. Lutningen $m$ (**slope**) av linjen är
$$m = \frac{2-(-1)}{3-(-3)} = \frac{1}{2}.$$
Linjens ekvation (**point-slope equation**) är då t ex
$$y = \frac{1}{2}(x-3) + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$
Skärningen med $y$-axeln erhålles då $x = 0$ och är alltså enligt linjens ekvation $y = \dfrac{1}{2}$, dvs $b = \dfrac{1}{2}$.

8. Ekvationen betyder en cirkel med radien $\sqrt{4} = 2$ och centrum i $(1, -1)$.

Se figur till problem 8.

9. Vi antar att serien gäller för något heltal $n$, dvs att

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}+\dots\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}, n=1,2,3,\dots \text{ (Induktionsantagandet)}$$

Vi ska då visa att

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}+\dots\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}, n=1,2,3,\dots \text{ (Formeln för } n+1)$$

Med hjälp av induktionsantagandet kan vi skriva vänster led i Formeln för $n+1$ på följande sätt

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}+\dots\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=$$

$$=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2+\frac{-2(n+2)+n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

Nu återstår bara att verifiera formeln för $n=1$. Vi finner att vänster led är lika med $\frac{1}{2}$ som är lika med höger led. Eftersom formeln stämmer för $n=1$ stämmer den nu för alla positiva heltal enligt induktionsaxiomet.

10. Vi väljer här att använda teorin för komplexa rötter på sidan A-8 ff. Eftersom $|-8i|^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2$ och $\arg(-8i)=-\frac{\pi}{2}$ så är den principala tredjeroten

$$w_1=2\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)=2\frac{\sqrt{3}}{2}-2i\frac{1}{2}=\sqrt{3}-i.$$

De övriga tredjerötterna ligger på en liksidig triangel inskriven i en cirkel med centrum i origo och ett hörn i $w_1$. De övriga rötterna är $w_2=2i$ samt $w_3=-\sqrt{3}-i$.

Se figur till problem 10.