Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN BASKURS 2016-03-17

SVAR OCH ANVISNINGAR

Hänvisningarna till figurerna är länkar.

1. **Algebraisk lösning** $|x-1| \leq 3$ är enligt definitionen av belopp ekvivalent med olikheterna

$$-3 \leq (x-1) \leq 3.$$

Dessa ger intervallet

$$-2 \leq x \leq 4.$$

Geometrisk lösning $|x-1| \leq 3$ betyder att vi söker de punkter på tallinjen vars avstånd till punkten 1 är mindre än eller lika med 3 enheter. Går vi 3 enheter åt vänster respektive höger på tallinjen från punkten 1 hamnar vi i -2 respektive 4 som alltså är intervallets ändpunkter och detta ger åter intervallet

$$-2 \leq x \leq 4.$$

Se figur till problem 1

2. **Algebraisk lösning** Vi studerar varje faktor i polynomet

$$P(x) = (x^3-1)(x^2+2x+1)(x^4-1).$$

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

t ex enligt formeln för differens av kuber eller enligt faktorsatsen då $x = 1$ är ett uppenbart nollställe. Eftersom

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

för alla x är $x = 1$ det enda reella nollstället till x^3-1.

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

enligt kvadratregeln och vi har alltså nollstället $x = -1$.

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

enligt konjugatregeln tillämpad två gånger. x^2+1 saknar reella nollställen så vi har funnit nollställena $x = 1$ och $x = -1$ här. Nu ska vi bestämma multipliciteterna.

Vi har funnit att

$$(x^3-1)\cdot(x^2+2x+1)\cdot(x^4-1) = \Big[(x-1)(x^2+x+1)\Big]\cdot(x+1)^2\cdot\Big[(x-1)(x+1)(x^2+1)\Big] =$$

$$= (x-1)^2\cdot(x+1)^3\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^2+1).$$

Polynomet har alltså nollstället $x = 1$ av multiplicitet 2 och nollstället $x = -1$ av multiplicitet 3.

Geometrisk lösning Det är geometriskt självklart att $x^3 = 1$ har precis en enkel reell rot och att $x^4 = 1$ har precis två enkla reella rötter. Framgår om man ritar de välkända graferna av $y = x^3$ och $y = x^4$ och drar den horisontella linjen $y = 1$. Faktorn $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ har uppenbart dubbla nollstället $x = -1$.

Varför multiplicitet är viktig information När vi har faktoriserat vårt polynom $P(x) = (x-1)^2(x+1)^3(x^2+x+1)(x^2+1)$ och bestämt multipliciteten av nollställena kan vi skissa grafen av $y = P(x)$ i närheten av de viktiga punkterna $x = 1$ och $x = -1$. I närheten av $x = 1$ kan vi approximera $P(x)$ med parabeln $y = 48(x-1)^2$, vi har alltså ett lokalt minimum där, och i närheten av $x = -1$ kan vi approximera med kurvan $y = 8(x+1)^3$, dvs vi har en terrasspunkt. Multiplicitet ger fundamental lokal information om funktioner.

Se figur till problem 2

3. **Algebraisk lösning** För att få ett reellt tal i nämnaren förlänger vi kvoten med nämnarens konjugat $1-i$.

$$\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-i^2}{1+1} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Geometrisk lösning Beloppet $|z|$ av det komplexa talet $z = a+bi$ är $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ och argumentet $\arg(z)$ är vinkeln mellan x-axeln och vektorn $a+bi$, $-\pi < \arg(z) \leq \pi$. Talet i har argumentet $\frac{\pi}{2}$ och beloppet 1. Talet $1+i$ har argumentet $\frac{\pi}{4}$ och beloppet $\sqrt{2}$. Enligt regeln för division av komplexa tal har $\frac{i}{1+i}$ argumentet $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ samt beloppet $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dvs kvoten är på polär form

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

och alltså på $a+bi$-form

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Se figur till problem 3

4. Notera särskilt att $-1 \leq \sin\frac{1}{2}x \leq 1$.

I det aktuella intervallet har $\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ rötterna $\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{4}$ och $\frac{1}{2}x = \frac{3\pi}{4}$, dvs rötterna är

$$x = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Se figur till problem 4

5. $\ln\frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1,$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ och $\ln e^2 = 2$. $\ln x = -\frac{1}{2}$ har roten $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Se figur till problem 5

6. **Geometrisk lösning** En linje som går genom punkten (x_0, y_0) och har lutningen m har ekvationen
(**point-slope equation**)

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Lutningen m (**slope**) av linjen genom $(6, -10)$ och $(-9, 20)$ är

$$m = \frac{20 - (-10)}{-9 - 6} = -2.$$

Linjens ekvation (**point-slope equation**) är då, om vi väljer $(-6, 10)$ som en av punkterna på linjen,

$$y = -2(x - 6) - 10 = -2x + 2.$$

Ekvationen kan skrivas $2x + y = 2$ och efter division med 2 får vi ekvationen på interceptform

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1.$$

Ekvationen $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ kallas interceptform eftersom $x = a$ och $y = b$ är linjens skärningspunkter (intercept) med x-axeln respektive y-axeln.

Algebraisk lösning Man kan sätta in punkternas koordinater i interceptformen så får man ekvationssystemet

$$6\frac{1}{a} - 10\frac{1}{b} = 1, \quad -9\frac{1}{a} + 20\frac{1}{b} = 1.$$

och så löser man systemet.

7. Ekvationen betyder en **cirkel** med **centrum** i $(-3, 4)$ och **radien** 5. Genom att sätta $x = 0$ i ekvationen får vi $(y - 4)^2 = 25 - 9 = 16$, dvs $y - 4 = \pm 4$ som ger $y = 0$ och $y = 8$. På samma sätt ger $y = 0$ att $x = 0$ och $x = -6$. Cirkeln går alltså genom origo samt skär x-axeln i $x = -6$ och y-axeln i $y = 8$.

Se figur till problem 7

8. **Geometrisk lösning** Det komplexa talet -1 har beloppet $|-1| = 1$ och argumentet $\arg(-1) = \pi$. Den principala tredjeroten

$$w_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

skall uppfylla att $r^3 = 1$ samt $3\theta = \pi$ och är alltså

$$\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

De övriga tredjerötterna ligger på en liksidig triangel inskriven i en cirkel med centrum i origo och ett hörn i w_1. Man erhåller dessa rötter genom att successivt addera $\dfrac{2\pi}{3}$ till argumentet för w_1 tills man kommer tillbaka till w_1.

De övriga rötterna är

$$w_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

samt

$$w_3 = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

I den polära formen av w_3 har vi använt konventionen att principalargumentet $\arg(z)$ uppfyller $-\pi < \arg(z) \leq \pi$.

Algebraisk lösning

Vi har här också möjlighet att välja en algebraisk lösning. Vi betraktar polynomet z^3+1. Detta har nollstället $z = -1$ och enligt faktorsatsen kan vi då faktorisera med $z+1$. Efter division med $z+1$ får vi

$$z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1).$$

Detta följer också av formeln för differens av kuber. Vi löser nu ekvationen $z^2 - z + 1 = 0$ på sedvanligt sätt och erhåller rötterna

$$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Därefter anger vi rötterna på polär form som i den geometriska lösningen.

Se figur till problem 8

9. Vi antar att serien gäller för något heltal n, dvs att

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2 \text{ (Induktionsantagandet)}$$

Vi ska då visa att

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots n \cdot (3n+1) + (n+1) \cdot (3n+4) = (n+1)(n+2)^2 \text{ (Formeln för } n+1)$$

Med hjälp av induktionsantagandet kan vi skriva vänster led i Formeln för $n+1$ på följande sätt

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \ldots + n \cdot (3n+1) + (n+1) \cdot (3n+4) =$$
$$= n \cdot (n+1)^2 + (n+1) \cdot (3n+4) = (n+1) \cdot [n(n+1) + 3n + 4] =$$
$$= (n+1) \cdot (n^2 + 4n + 4) = (n+1)(n+2)^2.$$

Nu återstår bara att verifiera formeln för $n = 1$. Vi finner att vänster led är lika med $1 \cdot 4 = 4$ som är lika med höger led $1 \cdot 2^2 = 4$. Eftersom formeln stämmer för $n = 1$ stämmer den nu för alla positiva heltal enligt induktionsaxiomet.

10. Eftersom ordningen inte spelar någon roll handlar problemet om hur många kombinationer det finns av tre element valda ur sex element. Detta antal är

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 20.$$

Här är alla kombinationerna!

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}$$
$$\{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}$$
$$\{1,4,5\}, \{1,4,6\}$$
$$\{1,5,6\}$$
$$\{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}$$
$$\{2,4,5\}, \{2,4,6\}$$
$$\{2,5,6\}$$
$$\{3,4,5\}, \{3,4,6\}$$
$$\{3,5,6\}$$
$$\{4,5,6\}$$