Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

2016-06-09
PROV I MATEMATIK
BASKURS

Tentamen består av 10 problem (max 4 poäng per problem) till vilka fordras fullständiga lösningar. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5. Hjälpmedel: Skrivdon. Skrivtid: 8 - 13.

1. Bestäm de reella tal som uppfyller olikheten $|x-1| \geq 3$. Markera på tallinjen de intervall där olikheten gäller.

2. Bestäm samtliga **reella** nollställen till polynomet
$$(x^3+1)(x^2-2x+1)(x^2-1).$$
Ange särskilt nollställenas multiplicitet.

   Ledning: a är ett nollställe av multiplicitet m till polynomet $P(x)$ om $P(x) = (x-a)^m\, Q(x)$ där polynomet $Q(x)$ uppfyller $Q(a) \neq 0$.

3. Bestäm det komplexa talet
$$z = \frac{1-i}{1+i}$$
på formen $a+bi$, där a och b är reella tal, samt markera talet i komplexa talplanet.

4. Skissera grafen av funktionen
$$y = \sin 2x\,, -\pi \leq x \leq \pi.$$
Markera särskilt värdena av $\sin 2x$ för $x = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{3\pi}{4}$ och $x = \pm\pi$. Lös slutligen ekvationen $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$.

5. Ange definitionsmängden för $y = \ln(x+1)$ samt skissera funktionens graf. Markera särskilt värdena av $\ln(x+1)$ för $x = e^{-2} - 1$, $x = 0, x = e - 1$ samt för $x = e^2 - 1$.

6. Genom punkterna $(6, -20)$ och $(-18, 40)$ går en rät linje. Beräkna koordinaterna för linjens respektive skärningspunkt med koordinataxlarna.

7. Ange typen av kurvan
$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$$
samt skissera den i ett rätvinkligt koordinatsystem. Bestäm också koordinaterna för de punkter där kurvan skär eller tangerar koordinataxlarna.

V.G.V!

8. Sök alla reella och komplexa rötter till ekvationen $z^4 = 1$. Ange rötterna både på polär form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ samt på formen $a+bi$, där a och b är reella tal. Markera rötterna i det komplexa talplanet.

9. $$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, n = 1, 2, 3, \dots.$$

   Bevisa denna formel med induktion för alla positiva heltal n.

10. Mängden $M = \{1, 2, 3, A, B, C, D\}$. En viss giv ur M består av två olika siffror följda av tre olika bokstäver där den inbördes ordningen mellan siffrorna respektive bokstäverna är betydelselös.

    EXEMPEL $1, 2, A, B, C$.

    Hur många sådana givar finns det? Ange svaret dels med hjälp av binomialkoefficienter, dels som ett tal samt redovisa hur samtliga givar ser ut.

Binomialkoefficenter

Symbolen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

kallas **binomialkoefficient**. Den förekommer till exempel i kombinatorik och i binomialsatsen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$