Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

LÄSANVISNINGAR VECKA 3-4

ARITMETIK FÖR RATIONELLA OCH REELLA TAL, OLIKHETER, ABSOLUTBELOPP

ADAMS P.1 Real Numbers and the Real Line
Läs sidan 3. Fortsätt att läsa sidan 4 till och med rutan **Rules för Inequalities**.

Det viktigaste att komma ihåg från rutan är punkt 4.

ENKELT EXEMPEL Om $x > 1$ är $-x < -1$.

Hoppa över avsnittet
"The *completeness* property of ... ". Fortsätt läsa avsnittet " The set of real numbers has some important special subsets:"

Hoppa sedan över **Example 1**.

Börja läsa avsnittet **Intervals**. Studera **Example 2** i detalj. Hoppa sedan över **Example 3** och **Example 4.** Läs mitt på sidan 7 om "the **union** of intervals" och "the **intersection** of intervals". Hoppa över **Example 5**.

Studera avsnittet **The Absolute Value** i sin helhet med samtliga exempel.

Som avslutning på detta avsnitt lös följande **Exercises** i Adams Chapter P.1

Exercises 7, 9, 15, 27, 29, 37, 43

Svaren i Adams är ofta mycket kortfattade. För fler anvisningar klickar man på länken nedan.

SVAR OCH ANVISNINGAR

PERMUTATIONER OCH KOMBINATIONER

Om detta finns inget att läsa i Adams. Vi nöjer oss med följande material. Studera exemplen noggrant.

Permutation och kombination är fundamentala begrepp i matematiken som kan förekomma i de mest olika sammanhang. Man brukar introducera begreppen inom ett område av matematiken som kallas KOMBINATORIK. I detta studeras på hur många olika sätt man kan välja eller ordna element ur en eller flera ändliga mängder.

EXEMPEL 1 Låt **M**={1,2} och **N**={A,B,C}. Hur många skyltar kan man göra med två siffror följda av tre bokstäver? Vi kan välja den första siffan på två sätt. För varje val av första siffran kan vi sedan välja den andra siffran på två sätt. Totalt får vi $2 \cdot 2 = 4$ val av de två första siffrorna.

$$\{1,1\},\{1,2\},\{2,1\},\{2,2\}$$

För varje val av dessa skyltar ska vi sedan välja en efterföljande bokstav. Detta kan ske på tre olika sätt. Totalt har vi då $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ skyltar med två siffror och en bokstav. För var och en av dessa väljer vi den andra efterföljande bokstaven på tre olika sätt. Då har vi totalt $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ skyltar. Vi fullföljer resonemanget för den sista bokstaven och finner att vi får

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$$

skyltar med två siffror följda av tre bokstäver.

Exemplet illustrerar en allmän princip som utnyttjas i många kombinatoriska resonemang.

MULTIPLIKATIONSPRINCIPEN Antag att en viss operation F kan utföras på n olika sätt och en annan operation G kan utföras på m olika sätt oberoende av hur F utförs. Då kan "först F sedan G" utföras på $n \cdot m$ olika sätt.

I exempel 1 får samma element förekomma flera gånger på en skylt, t ex $\{1,1,A,A,A\}$. Vi kan också göra val där alla element måste vara *olika.*

En **permutation** av en ändlig mängd **M** är ett sätt att räkna upp elementen i **M** i en viss ordning och då blir alla elementen i permutationen olika. Detta följer direkt eftersom elementen i det matematiska begreppet mängd alla är olika.

EXEMPEL 2 Om **M**={1} finns bara ett sätt att räkna upp elementen i **M**.

EXEMPEL 3 Om **M**=$\{1,2\}$ finns två sätt att räkna upp elementen i **M**, nämligen $\{1,2\}$ och $\{2,1\}$.

EXEMPEL 4 Om **M**$=\{1,2,3\}$ finns sex sätt att räkna upp elementen i **M**, nämligen $\{1,2,3\},\{2,3,1\},\{3,1,2\},\{1,3,2\},\{3,2,1\},\{2,1,3\}$.

SATS 1 Antalet permutationer av en mängd med n element är

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1.$$

BEVIS: Det första elementet kan väljas på n olika sätt. För varje val av det första elementet kan det andra elementet väljas på $n-1$ olika sätt. Totala antalet sätt att välja de två första elementen är alltså enligt multiplikationsprincipen $n(n-1)$. För varje val av de två första elementen kan sedan det tredje elementet väljas på $(n-2)$ olika sätt. Totala antalet sätt att välja de tre första elementen är alltså $n(n-1)(n-2)$. Upprepas resonemanget får man att totala antalet sätt att välja n element är $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$.

Vi inför beteckningen

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$$

som utläses " n fakultet".

Låt **M** vara en mängd med n element. En **permutation** av k element ur **M** är ett sätt att räkna upp k element i en viss ordning ur n givna.

SATS 2 Antalet permutationer av k element ur n givna är

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

EXEMPEL 5 Antalet permutationer av 2 element ur 4 givna, t ex ur **M**$=\{1,2,3,4\}$, ska enligt SATS 2 vara $4\ldots(4-2+1)=4\cdot 3=12$. Låt oss kontrollera detta.

$$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2,1\},\{3,1\},\{4,1\},\{3,2\},\{4,2\},\{4,3\}.$$

Det stämmer.

EXEMPEL 6 Antalet permutationer av 3 element ur 4 givna ska enligt SATS 2 vara $4 \dots (4-3+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Låt oss kontrollera detta.

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$$

är de fyra möjliga valen av fyra element i stigande följd. Var och en av dessa val av tre element kan permuteras på $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ olika sätt. Totala antalet permutationer blir alltså $4 \cdot 6 = 24$.

Följande uttryck är mycket användbart

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 2 \cdot 1}{(n-k)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Om $k = n$ blir uttrycket i vänster led $n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$. Höger led blir

$$\frac{n!}{0!}$$

som givetvis ska vara lika med $n!$. Så är fallet om vi definierar

$$0! = 1.$$

Detta innebär att man i matematiken menar att det bara finns ett sätt att välja ett element ur en mängd som inte har några element, dvs ur den tomma mängden. Det kanske inte är så dumt. Att välja element innebär i denna situation att man konstaterar att en viss mängd faktiskt är tom och att det alltså inte går att göra något val av element. Och det behöver man bara konstatera en gång.

I en permutation av k element ur n givna tar vi hänsyn till ordningen mellan elementen. T ex är $\{1,2\}$ och $\{2,1\}$ två permutationer.
Nu ska vi bestämma antalet sätt att välja k element ur n givna om vi inte tar hänsyn till ordningen mellan elementen. Detta är samma sak som att bestämma antalet delmängder med k element till en mängd med n element. I en delmängd eller mängd spelar inte ordningen mellan elementen någon roll. T ex är mängden $\{1,2\}$ och mängden $\{2,1\}$ samma mängd.

EXEMPEL 7 I exempel 5 fann vi de tolv permutationerna av 2 element ur 4 givna, nämligen

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,1\}, \{3,1\}, \{4,1\}, \{3,2\}, \{4,2\}, \{4,3\}.$$

Nu ska vi inte ta hänsyn till ordningen mellan elementen utan bara räkna delmängder. T ex är $\{1,2\}$ och $\{2,1\}$ samma delmängd. Hur många permutationer svarar mot en viss delmängd? Jo, i detta fall $2! = 2$. För att få antalet kombinationer eller delmängder måste vi alltså dividera totala antalet permutationer med $2!$. Antalet kombinationer är alltså $12/2! = 6$. De är

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}.$$

Exempel 7 illustrerar hur vi skulle kunna bevisa

SATS 3 Antalet kombinationer av k element valda ur en mängd av n element är

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Vi inför symbolen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Talet $\binom{n}{k}$ utläses "n över k" och kallas **binomialkoefficient.** Förklaringen till denna benämning kommer i samband med binomialteoremet.

EXEMPEL 8 Mängden $M = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. En viss giv ur M består av tre siffror där den inbördes ordningen är betydelselös. Hur många sådana givar finns det?

LÖSNING: Eftersom ordningen inte spelar någon roll handlar problemet om hur många kombinationer det finns av tre element valda ur sju element. Detta antal är

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)!3!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 5 = 35.$$

Här är alla kombinationerna!

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,2,7\}$$
$$\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},\{1,3,7\}$$
$$\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,4,7\}$$
$$\{1,5,6\},\{1,5,7\}$$
$$\{1,6,7\}$$

$$\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,3,7\}$$
$$\{2,4,5\},\{2,4,6\},\{2,4,7\}$$
$$\{2,5,6\},\{2,5,7\}$$
$$\{2,6,7\}$$

$$\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,4,7\}$$

$$\{3,5,6\},\{3,5,7\}$$

$$\{3,6,7\}$$

$$\{4,5,6\},\{4,5,7\}$$
$$\{4,6,7\}$$
$$\{5,6,7\}$$

Antalet är

$$(5+4+3+2+1)+(4+3+2+1)+(3+2+1)+(2+1)+1 =$$

$$= \frac{5\cdot 6}{2} + \frac{4\cdot 5}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} + \frac{2\cdot 3}{2} + \frac{1\cdot 2}{2} = 15+10+6+3+1 = 35.$$

Det här tycker jag är fenomenalt vacker matematik! Här skulle man vilja fördjupa sina studier av kombinationer men tiden räcker inte.

Läsaren kanske undrar varifrån uträkningarna

$$(5+4+3+2+1)+(4+3+2+1)+(3+2+1)+(2+1)+1=$$
$$=\frac{5\cdot 6}{2}+\frac{4\cdot 5}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{1\cdot 2}{2}$$

kommer ifrån. Förklaring kommer i nästa avsnitt.

INDUKTION

I uträkningarna i Exempel 8 har vi använt formeln

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

Redan den tyske matematikern Karl Friedrich Gauss (1777-1855) lär redan som ung skolpojke ha bevisat denna formel genom att summera första och sista termen, därefter näst första och näst sista termen osv. Om man inte hittar ett sådant genialt bevis för en formel som verkar gälla för heltal kan man pröva en bevismetod som kallas **induktion.**

Vi illustrerar metoden genom att redovisa induktionsbeviset för formeln (1).

BEVIS: Vi utgår ifrån att vi inte vet om formel (1) är sann. Det är vår uppgift att visa detta. Vi väljer induktionsbevis.
Vi **antar** då att formeln är sann för **något** positivt heltal $n = p$, dvs att

$$p + (p-1) + (p-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{p(p+1)}{2} \qquad \text{(Induktionsantagandet)}$$

I våra fortsatta resonemang i beviset har vi alltså induktionsantagandet att stödja oss på utöver alla de gängse axiomen och satserna som finns i matematiken. Nu bevisar vi att om vi har induktionsantagandet att stödja oss på så är formeln sann för $n = p + 1$, dvs att

$$(p+1) + p + (p-1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \qquad \text{(Formeln för n=p+1)}$$

Med hjälp av induktionsantagandet kan vi skriva om vänsterledet i formeln för $n = p + 1$. Uttrycket inom klammern nedan kan nämligen ersättas med högerledet i induktionsantagandet.

$$(p+1) + [p + (p-1) + \ldots + 2 + 1] = (p+1) + \frac{p(p+1)}{2} =$$

$$= \frac{2(p+1) + p(p+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

Vår formel är alltså "sann" för $n = p+1$ för något p i den konstiga matematik där vi utnyttjar ett antagande om att

$$p + (p-1) + (p-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{p(p+1)}{2}$$

för något p. Men vi vet inte än om antagandet är sant för något p! Formeln är kanske bara nonsens. Då har vi inte åstadkommit något alls med våra räkningar.

Vi måste avsluta med att kontrollera om formel (1) stämmer för något p, ju mindre detta p är desto bättre. En snabb kontroll visar att formeln är sann för t ex $p = 1$. Nu är det klart! Eftersom formeln är sann för $p = 1$ så är den enligt kalkylen ovan sann för $p + 1 = 1 + 1 = 2$. Då är den sann för $p + 2 = 3$ osv. Att formeln genom detta resonemang ska anses vara sann för alla positiva heltal är ett axiom, induktionsaxiomet.

I praktiken kontrollerar man givetvis att en formel är sann för åtminstone små heltal innan man ger sig i kast med ett bevis för formeln. Jag tycker ett induktionsbevis blir mer dramatiskt om man först visar induktionssteget p till $p + 1$ och sedan avslutar med att konstatera ett formeln är sann för $p = 1$ till exempel.

När man blir van att använda induktionsbevis byter man inte beteckning på variabeln n till p. Det är alldeles onödigt. Jag tycker att vi nu är vana induktionsbevisare.

EXEMPEL 1 I teorin för serier förekommer den geometriska serien

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Bevisa denna formel för alla positiva heltal $n = 1, 2, 3, \dots$.

BEVIS Eftersom vi här och nu inte vet något om teorin för geometriska serier försöker vi med ett induktionsbevis. Vi antar alltså att serien gäller för något heltal n, dvs att

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \text{ (Induktionsantagandet)}$$

Vi ska då visa att

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} \text{ (Formeln för } n + 1\text{)}$$

Med hjälp av induktionsantagandet kan vi skriva vänster led i Formeln för $n+1$ på följande sätt

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} =$$
$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} =$$
$$= 2 - \frac{2}{2 \cdot 2^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Nu återstår bara att verifiera formeln för $n = 1$. Vi finner att vänster led är lika med 1 och höger led lika med $2 - \frac{1}{2^0} = 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$. Eftersom formeln stämmer för $n = 1$ stämmer den nu för alla positiva heltal enligt induktionsaxiomet.

EXEMPEL 2 Vad är det för fel på det här induktionsbeviset? Vi ska visa formeln $n = n + 1$ för alla positiva heltal. Antag att formeln är sann för något n, dvs att

$$n = n + 1 \text{ (Induktionsantagandet).}$$

Vi ska visa att då är formeln sann för $n + 1$, dvs att

$$n + 1 = n + 2 \text{ (Formeln för n+1)}$$

Genom att addera talet 1 till båda leden i Induktionsantagandet erhåller vi $n+1 = n+2$. Alltså har vi visat Formeln för $n+1$ och $n = n+1$ gäller för alla n enligt induktionsaxiomet.

Vi ser att i steget n till $n + 1$ kan vi bevisa vilket trams som helst. Det är helt avgörande att vi verifierar den påstådda formeln för det minsta heltal den är definierad för. Den påstådda likheten $n = n + 1$ kan inte gälla för något n. Om vi subtraherar n från $n = n+1$ får vi $0 = 1$. En motsägelse. Alltså kan inte $n = n+1$ för något n.

Adams, CALCULUS behandlar induktionsbevis i Chapter 2.3 i marginalen på sidan 110 (sidan 109 i 7th Edition) och räkneregeln

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n' \qquad (*)$$

bevisas där med induktion. Ett djupare studium av detaljerna i beviset rekommenderas varmt.
Även **EXAMPLE 6** i Chapter 2.3 samt **EXERCISES** 53 och 54 är utmärkta exempel på induktionsbevis som bör begrundas.

Vi avslutar med några övningar som repetition.

ÖVNING 1 Bestäm genom att använda en formel antalet permutationer av 3 element ur 4 givna, t ex ur **M**$=\{1,2,3,4\}$. Verifiera resultatet genom att ange samtliga permutationer.

ÖVNING 2 Mängden $M=\{1,2,3,4\}$. En viss giv ur M består av tre siffror där den inbördes ordningen är betydelselös. Hur många sådana givar finns det? Ange svaret dels som en binomialkoefficient, dels som ett tal samt redovisa hur samtliga givar ser ut.

ÖVNING 3 I teorin för serier kan man genom ett genialt trick bevisa att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}, n=1,2,3,\ldots.$$

Bevisa denna formel med induktion.

SVAR OCH ANVISNINGAR

POLYNOM

Nu är vi tillbaka i Adams.
P.6 behandlar polynom och rationella funktioner, dvs kvoter mellan polynom. Studera **Example 1, METHOD 1** som beskriver "lång division".

Läs **THEOREM 1, Faktorsatsen** och texten som följer.

Example 2 är viktigt. Fortsätt läsa resten av P.6. Det är mycket viktigt stoff.

Kvadratiska polynom $Ax^2 + Bx + C$ behöver ofta kvadratkompletteras. Hur detta går till står i Adams sidan 343 (sidan 342, 7th Ed, sidan 325, 6th Ed). Det finns inga speciella övningar på detta i Adams. Vi ger ett

EXEMPEL Kvadratkomplettera $x^2 + 4x + 3$.

LÖSNING Enligt receptet i Adams ska vi skriva $x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1$.

Som avslutning på detta avsnitt om polynom lös följande **Exercises** i Adams Chapter P.6

Exercises 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13

ÖVNING KVADRATKOMPLETTERING Kvadratkomplettera $x^2 - 6x + 5$.

SVAR OCH ANVISNINGAR