Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGAR VECKA 3-4

SVAR OCH ANVISNINGAR

EXERCISES ADAMS P.1

EXERCISE 7 $x \geq 0$ **och** $x \leq 5$ betyder att $0 \leq x \leq 5$, dvs att x tillhör intervallet $[0, 5]$.

EXERCISE 9 $x > -5$ **eller** $x < -6$ betyder att x kan tillhöra intervallet $(-\infty < x < -6)$ eller intervallet $(-5 < x < \infty)$. Detta innebär att x tillhör **unionen**

$$(-\infty < x < -6) \cup (-5 < x < \infty).$$

EXERCISE 15 Använd tekniken i **Example 2**.

EXERCISE 27 Använd ett resultat från den första rutan på sidan 9.

EXERCISE 29 Använd ett resultat från den andra rutan på sidan 9.

EXERCISE 37 Använd tekniken i **Example 7**.

EXERCISE 43 Ledning: Absolutbeloppet av varje tal $a \neq 0$ är alltid positivt. Därför är t ex $|-2| = -(-2) > 0$ och generellt måste vi för varje $a < 0$ ha $|a| = -a > 0$.

ÖVNINGAR LÄSANVISNINGAR VECKA 36

ÖVNING 1 Antalet permutationer av 3 element ur 4 givna, t ex ur **M**$= \{1, 2, 3, 4\}$, ska enligt SATS 2 vara $4 \ldots (4 - 3 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Låt oss kontrollera detta. Vi har fyra permutationer

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$$

med elementen i stigande följd. Var och en av dessa representerar totalt $3! = 6$ permutioner. Totala antalet permutationer blir alltså $4 \cdot 6 = 24$. Det stämmer.

ÖVNING 2 Eftersom ordningen inte spelar någon roll handlar problemet om hur många kombinationer det finns av tre element valda ur fyra element. Detta antal är

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.$$

Här är alla kombinationerna.

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}$$

Det är samma permutationer som i Övning 1 men nu representerar var och en av dessa en och endast en **kombination**. T ex är $\{1,2,3\}$ och $\{1,3,2\}$ samma kombination.

ÖVNING 3 Vi antar att serien gäller för något heltal n, dvs att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}\text{ (Induktionsantagandet)}$$

Vi ska då visa att

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}\text{ (Formeln för } n+1)$$

Med hjälp av induktionsantagandet kan vi skriva vänster led i Formeln för $n+1$ på följande sätt

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Nu återstår bara att verifiera formeln för $n=1$. Vi finner att vänster led är lika med $\frac{1}{2}$ som är lika med höger led. Eftersom formeln stämmer för $n=1$ stämmer den nu för alla positiva heltal enligt induktionsaxiomet.

EXERCISES ADAMS P.6

Exercise 1 Använd **The Quadratic Formula** på sidan 41.

Exercise 3 Använd **The Quadratic Formula** på sidan 41.

Exercise 5 Finn inspiration i **Example 5 (b)**.

Exercise 7 Leta bland **Miscellaneous Factorings** på sidan 42.

Exercise 9 Jag hittar inget exempel i Adams som kan inspirera. Om man råkar tänka på att

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

så kan man skriva

$$x^6-3x^4+3x^2-1=(x^2)^2-3(x^2)^2+3x^2-1=$$
$$=((x^2)-1)^3=((x-1)(x+1))^3=(x-1)^3(x+1)^3.$$

Exercise 9 är knepig om man vill göra en elegant lösning.

Exercise 11 $x^5 + x^3 + 8x^2 + 8 = x^3(x^2 + 1) + 8(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^3 + 8)$. Använd nu **Miscellaneous Factorings** (e) på sidan 42.

Exercise 13 Kopiera den långa divisionen i **Example 1**.

ÖVNING KVADRATKOMPLETTERING $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$.