Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

LÄSANVISNINGAR VECKA 4-5

BINOMIALSATSEN

Ett uttryck av formen $a + b$ kallas ett **binom** eftersom det är summan av två monom. För uttrycket $(a+b)^n$ gäller den fundamentala **Binomialsatsen**, som på engelska heter **The Binomial Theorem**. Denna sats hittar man i Adams Ch 9.8.

Binomialsatsen Om n är ett positivt heltal gäller

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Symbolen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

kallas alltså **binomialkoefficient** eftersom den förekommer som faktor i binomialsatsen.

Vi har i satsen använt att

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$$

samt

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

EXEMPEL Följande specialfall av binomialteoremet förväntas man kunna som matematiker och matematikstudent.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Beviset i Adams för binomialsatsen utnyttjar Taylors sats om funktionsserier. Detta är anledningen till att Adams betraktar uttrycket $(a+x)^n$ istället för $(a+b)^n$. Vi är ju vana vid att en funktion beror av en variabel som oftast heter x. Funktionsserier vet vi ingenting om ännu. Ett annat bevis kan man få genom att använda kombinatorik. Betrakta

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b).$$

Termer av typen $a^{n-k}b^k$ får man genom att multiplicera k stycken b som väljs ur k olika parenteser med $(n-k)$ stycken a som väljs ur de återstående parenteserna. De k parenteserna ur vilka vi väljer b kan väljas på $\binom{n}{k}$ olika sätt eftersom ordningen mellan parenteserna inte spelar någon roll. Det handlar alltså om kombinationer.

Det finns många fascinerande matematiska samband som innehåller binomialkoefficienter. Här följer några exempel.

EXEMPEL 1

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Detta följer direkt ur binomialsatsen tillämpad på $2^n = (1+1)^n$. Ännu intressantare är tolkningen i termer av delmängder av en ändlig mängd $\mathbf{M}$ med n element. Höger led är det totala antalet delmängder som kan erhållas ur $\mathbf{M}$. Observera att $\binom{n}{0} = 1$ är antalet delmängder med noll element, dvs den tomma mängden. Den tomma mängden anses vara delmängd av varje mängd och finns alltså med i det totala antalet delmängder av $\mathbf{M}$. Vidare är $\binom{n}{n} = 1$ antalet delmängder med n element. dvs $\mathbf{M}$. Varje mängd anses vara delmängd av sig själv. Vänster led 2^n är också antalet delmängder av $\mathbf{M}$ enligt multiplikationsprincipen. Då vi konstruerar alla delmängder kan vi nämligen antingen ta med ett element i delmängden eller inte ta med elementet. Varje sådant val kan göras på två sätt så totala antalet val blir 2^n.

Det är anmärkningsvärt hur snabbt antalet delmängder växer med antalet element n. Talet 2^n är en så kallad exponentialfunktion som har en extrem tillväxt. Den som är intresserad kan läsa om detta redan nu i Adams Ch 3.4, **Theorem 5.** Man kan också börja fundera över t ex antalet delmängder av de reella talen $\mathbf{R}$. Hur många delmängder finns det av $\mathbf{R}$? Svaret är att de är alldeles ruskigt många, till och med fler än de reella talen! Vill man veta mer om sådana fascinerande frågeställningar kan man börja söka på ”cardinal number”.

EXEMPEL 2 Visa att
a)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
b)
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

LÖSNING: a) Varje gång vi väljer en delmängd av $\{1, 2, \ldots, n\}$ med k element väljer vi också en komplementmängd med $n-k$ element och därav följer a).

b) $\binom{n+1}{k}$ är antalet delmängder med k element valda ur $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Av dessa innehåller $\binom{n}{k-1}$ elementet $n+1$ och $\binom{n}{k}$ innehåller inte $n+1$. Härav följer b).

Exempel 2 a) visar varför uttrycken för $(a+b)^n$ är symmetriska, t ex varför
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3.$$
Här noterar vi också att summan av koefficienterna
$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$
precis som Exempel 1 garanterar.

Av Exempel 2b) följer ett intressant sätt att successivt beräkna binomialkoefficienter. Vi försöker beräkna $(a+b)^4$.
Eftersom
$$\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$$
och utvecklingen av $(a+b)^3$ visar att
$$\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$$
så finner vi enkelt att
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a^3 b + b^4.$$

ÖVNING 1 Beräkna $(a+b)^5$ med hjälp av bl a Exempel 2 och utvecklingen av $(a+b)^4$.

ÖVNING 2 Visa att

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0,$$

dvs

$$\sum_{\text{k jämnt}}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{\text{k udda}}^{n}\binom{n}{k}.$$

Detta betyder att hälften av delmängderna innehåller att jämnt antal element och den andra hälften ett udda antal element. Eftersom totala antalet delmängder enligt Exempel 1 är 2^n är halva antalet 2^{n-1}. Den tomma mängden som svarar mot $\binom{n}{0}$ ger samma tecken som delmängderna med jämnt antal element eftersom $(-1)^0=1$.

Ledning: T ex tillämpa binomialsatsen på $(1+(-1))^n=0$.

SVAR OCH ANVISNINGAR

KOMPLEXA TAL

Allt vi behöver veta om KOMPLEXA TAL står i Adams **Appendix I** sidorna A-1 till A-10. Varje mening och exempel i texten måste läsas och begrundas. Jag har inga förslag på förbättringar eller tillägg till Adams text förutom några personliga reflektioner över komplexa tal i allmänhet.

Några personliga reflektioner

Jag tycker personligen att benämningen **tal** på komplexa tal kan ge felaktiga associationer. De reella talen $\mathbf{R}$ kan representeras på tallinjen och addition och multiplikation av två reella tal ger ett nytt tal på denna linje. De komplexa talen $\mathbf{C}$ däremot är **vektorer i planet**. Addition och multiplikation kan ändra både längd och riktning på det nya talet jämfört med de givna termerna eller faktorerna. När jag använder komplexa tal tänker jag alltid på att dessa tal är vektorer i planet.

Orsaken till att komplexa tal kallas tal och inte vektorer är att addition och **multiplikation** uppfyller samma räknelagar som de reella talen och är precis som $\mathbf{R}$ en så kallad **talkropp.** Det finns dock en viktig skillnad mellan $\mathbf{R}$ och $\mathbf{C}$. Det finns ingen ordningsrelation för komplexa tal, dvs reglerna för olikheter på sidan 4 i Adams avsnitt P.1 finns inte för komplexa tal.

Låt nämligen det komplexa talet i, som uppfyller $i^2 = -1$, uppfylla en olikhet, säg $i > 0$. Då skall enligt Regel 3 för olikheter på sidan 4 följa att $i \cdot i > i \cdot 0 = 0$. Men detta gäller ju inte eftersom $i^2 = -1 < 0$. Om vi låter $i < 0$ skall enligt Regel 4 gälla att $i \cdot i > i \cdot 0 = 0$. Det fungerar inte heller.

Målet med studierna av texten är att kunna lösa några representativa övningar.

Exercises Adams sidan A-10 1, 3, 5, 7, 13, 15, 17, 23, 25, 29, 31, 37, 39, 41, 51

SVAR OCH ANVISNINGAR