Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
DERIVATOR OCH INTEGRALER
2015-03-20

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem). 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 14.00-19.00. **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1.
$$f(x) = \begin{cases} x, \, x < 1 \\ k, x \geq 1 \end{cases}.$$

Bestäm k så att $f(x)$ blir kontinuerlig i $x = 1$ samt skissera grafen av $f(x)$ för detta k-värde på intervallet $0 \leq x \leq 2$.

2. Funktionen $f(x) = |x| - 1, \ -1 \leq x \leq 2$. Skissera grafen av $f(x)$ samt utnyttja denna för att bestämma funktionens lokala och absoluta extremvärden.

3. Skissera kurvan $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, \ 0 \leq x < \infty$ samt beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

   Ledning: $f(0) = 0, \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0+$ samt $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$ underlättar kurvritningen. Integralen kan till exempel beräknas med hjälp av substitutionen
$$1 + x^2 = u, 2x\,dx = du.$$

4. Skissera kurvan
$$y = \frac{x+1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$
   Undersök särskilt definitionsmängden, nollställen, lokala extrempunkter, vertikala och horisontella asymptoter samt inflexionspunkter.

   Ledning: $f'(x) = -\dfrac{x+2}{x^3}, \ f''(x) = 2 \cdot \dfrac{x+3}{x^4}$.

5. Skissera kurvan
$$f(x) = xe^{-x}, \, 0 \leq x < \infty,$$
   samt bestäm det största värdet av funktionen.

6. Skissera kurvan $f(x) = \ln x, \ 1 \leq x \leq e$, samt beräkna integralen
$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x\,dx.$$

V.G.V!

7. Skissera kurvan $y = x^2$, $-3 \le x \le 3$. Bestäm tangeringspunkternas respektive x-koordinat för de två tangenter till kurvan som går genom punkten $(1, 0)$.

8.
$$f(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{x},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

a) Bevisa att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) Bevisa att $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1$.

c) Motivera varför Taylorpolynomet $P_1(x)$ av $f(x)$ omkring origo av ordning 1 är $P_1(x) = x$.

d) Skissera grafen av $f(x)$ nära origo.

e) Bevisa att x-axeln är horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.

Beloppet av x

$$|x| = \begin{cases} x,\ x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases} .$$

Storleksordningar

$$\lim_{x \to +\infty} x^a\, e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$

Derivatan av några transcendenta funktioner

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1 + x^2}$$

l'Hôpitals regel

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ om t ex}$$

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$, $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar och $g'(x) \neq 0$ på ett intervall omkring $x = c$, $x \neq c$.

Taylorpolynomet $P_n(x)$ av ordning n för f omkring a

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$