Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN 2015-03-20
DERIVATOR OCH INTEGRALER

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. **Problemtyp:** Adams, Ch 1.4 EXERCISES 17, 18

Funktionen blir kontinuerlig i $x = 1$ om vi kan bestämma k så att

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1) = 1.$$

Varje polynom $p(x)$ är en kontinuerlig funktion. Därför existerar både vänster-och högergränsvärdena i varje punkt x_0 och är lika med polynomets värde i x_0, dvs

$$\lim_{x \to x_0-} p(x) = \lim_{x \to x_0+} p(x) = p(x_0).$$

Därför blir

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} x = 1$$

och

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} = k.$$

Dessa vänster-och högergränsvärden ska alltså vara lika med funktionsvärdet i $x = 1$, dvs lika med $f(1) = 1$. Detta ger villkoret att $1 = k$, dvs $k = 1$. Den sökta funktionen är alltså

$$f(x) = \begin{cases} x, \, x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}.$$

2. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXERCISES 13, 14

Funktionens extremvärden sökes bland de eventuella kritiska punkterna ($f'(x_0) = 0$), singulära punkterna ($f'(x_0)$ existerar ej) och definitionsmängdens ändpunkter. Den aktuella funktionen saknar kritiska punkter men har en singulär punkt i $x = 0$. Vi beräknar därför $f(0) = -1$ samt värdena i ändpunkterna $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$. Med hjälp av grafen drar vi slutsatsen att $f(x) \geq -1$ samt $f(x) \leq 1$ på hela intervallet. Alltså är $f(0) = -1$ det absolut minsta värdet och $f(1) = 1$ det absolut största värdet. Ett lokalt maximum är $f(-1) = 0$.

3. **Problemtyp:** Adams, Ch 5.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 5

$$\int_0^\infty \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \Big[1 + x^2 = u, \, 2x\,dx = du\Big] = \int_1^\infty \frac{du}{u^2} = \int_1^\infty u^{-2} =$$

$$= -u^{-1}\Big|_1^\infty = -\frac{1}{u}\Big|_1^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

4. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 17

   Definitionsområdet är $x \neq 0$. Nollställe $x = -1$.

   Vertikal asymptot är $x = 0$ där $\lim_{x \to 0+} y = +\infty$ och $\lim_{x \to 0-} y = +\infty$.

   Vidare är $\lim_{x \to \pm\infty} y = 0\pm$ och det följer att $x-$axeln är en horisontell asymptot.

$$f'(x) = -\frac{x+2}{x^3}$$

   har nollstället $x = -2$, som ger en lokal minimipunkt $= -\frac{3}{4}$.

   $f''(x) = 2\frac{x+3}{x^4}$ ger att $x = -3$ är en inflexionspunkt.

5. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXAMPLE 6, Ch 4.6 EXERCISES 31, 33

   Då $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $0 \leq x < \infty$ samt $f(0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ och t ex $f(1) > 0$ så har funktionen ett absolut maximum enligt en sats i Adams. Detta maximum återfinns i en kritisk punkt eller i en singulär punkt eller i ändpunkten $x = 0$. Då $f(0) = 0$ har $f(x)$ sitt största värde i en kritisk punkt eller i en singulär punkt.

$$f'(x) = e^{-x}(1-x).$$

   Singulära punkter saknas alltså. Den kritiska punkten, där alltså $f'(x) = 0$, är $x = 1$. Det största värdet ges alltså av $x = 1$ och är lika med $\frac{1}{e}$.

6. **Problemtyp:** Adams, Ch 6.1 EXAMPLE 5, EXERCISE 5

   Integralen beräknas med partiell integration.

$$\int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$
$$= (e - 0) - \int_1^e 1 \, dx = e - x|_1^e = e - (e - 1) = 1.$$

7. **Problemtyp:** Adams, Ch 2.2 EXERCISES 45, 47, 49

   Låt den sökta x-koordinaten för tangenternas tangeringspunkt P vara $x = a$. Tangeringspunktens koordinater är alltså $P = (a, a^2)$. Linjen genom tangeringspunkten P och punkten $(1, 0)$ har lutningen

$$\frac{a^2}{a-1} \qquad (1)$$

   enligt definitionen av lutning. Eftersom linjen är tangent till kurvan $y = x^2$ i P har den också lutningen

$$f'(a) = 2a \qquad (2)$$

   Sätter vi uttrycken i (1) och (2) lika får vi ekvationen

$$\frac{a^2}{a-1} = 2a$$

   som har rötterna $a = 0$ och $a = 2$.

8. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.3 EXAMPLE 1, CH 4.10 EXERCISES 1,5,7 EXERCISES 17, 18 Ch 1.2 EXAMPLE 11, EXERCISE 75

a) Vi försöker inte göra något smart här utan använder l'Hôpitals regel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{-x^2}}{1} = 0$$

eftersom $\lim_{x \to 0} xe^{-x^2} = 0$.

b) Inte heller här gör vi några smarta observationer utan använder l'Hôpitals regel två gånger.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{-x^2}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}}{2} = 1$$

eftersom $\lim_{x \to 0} e^{-x^2} = 1$.

c) Eftersom $f'(x)$ existerar i en omgivning av origo samt $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ så är alltså Taylorpolynomet $P_1(x) = x$ enligt formeln för polynomet.

d) Eftersom funktionen approximeras av Taylorpolynomet $P_1(x) = x$ nära origo kan vi approximera grafen av $f(x)$ med detta polynom i en liten omgivning av origo.

e) Eftersom $\lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = 0$ är

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - e^{-x^2}}{x} = 0 \pm .$$

Alltså är x-axeln horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.