Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
DERIVATOR OCH INTEGRALER
2016-03-10

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem). 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 08.00-13.00. **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1. $$f(x) = \begin{cases} x, \, x < 1 \\ 1, \, x = 1 \\ k - x, \, x > 1. \end{cases}.$$

   Bestäm k så att $f(x)$ blir kontinuerlig i $x = 1$ samt skissera grafen av $f(x)$ för detta k-värde på intervallet $0 \le x \le 2$.

2. Funktionen $f(x) = 1 - |x - 1|, \;\; -1 \le x \le 2$. Skissera grafen av $f(x)$ samt utnyttja denna för att bestämma funktionens lokala och absoluta extremvärden.

3. Skissera kurvan $f(x) = \dfrac{3x^2}{(1 + x^3)^2}, \;\; 0 \le x < \infty$ samt beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{3x^2\,dx}{(1 + x^3)^2}$.

   Ledning: $f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0+$ samt $f'(x) = 6 \cdot \dfrac{x(1 - 2x^3)}{(1 + x^3)^3}$ underlättar kurvritningen. Integralen kan till exempel beräknas med hjälp av substitutionen

   $$1 + x^3 = u, \, 3x^2\,dx = du.$$

4. Skissera kurvan

   $$y = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

   Undersök särskilt definitionsmängden, nollställen, horsisontella och vertikala asymptoter samt eventuella lokala extrempunkter.

5. Skissera kurvan

   $$f(x) = x^2 e^{-x}, \, 0 \le x < \infty,$$

   samt bestäm det största värdet av funktionen.

6. Skissera kurvan $f(x) = x \ln x, \;\; 0 < x \le 1$, samt beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 x \ln x\,dx$.

   Ledning: $\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0-$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \ln x + 1$, $\lim_{x \to 0+} x^2 \ln x = 0-$ är användbart för problemet.

V.G.V!

7. Skissera kurvan $y = x^3$, $-2 \le x \le 2$. Bestäm tangeringspunkternas respektive x-koordinat för de två tangenter till kurvan som går genom punkten $(1,0)$.

8.
$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

a) Bevisa att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) Bevisa att $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

c) Motivera varför Taylorpolynomet $P_1(x)$ av $f(x)$ omkring origo av ordning 1 är $P_1(x) = \frac{1}{2}x$.

d) Skissera grafen av $f(x)$ nära origo.

e) Bevisa att x-axeln är horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.

Beloppet av x

$$|x| = \begin{cases} x,\ x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}.$$

Storleksordningar

$$\lim_{x \to +\infty} x^a\, e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$

Derivatan av några transcendenta funktioner

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

l'Hôpitals regel

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ om t ex}$$

$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$, $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar och $g'(x) \neq 0$ på ett intervall omkring $x = c$, $x \neq c$.

Taylorpolynomet $P_n(x)$ av ordning n för f omkring a

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$