Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN 2016-03-10
DERIVATOR OCH INTEGRALER

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. **Problemtyp:** Adams, Ch 1.4 EXERCISES 17, 18

   Funktionen blir kontinuerlig i $x = 1$ om vi kan bestämma k så att

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1) = 1.$$

   Varje polynom $p(x)$ är en kontinuerlig funktion. Därför existerar både vänster-och högergränsvärdena i varje punkt x_0 och är lika med polynomets värde i x_0, dvs

$$\lim_{x\to x_0-} p(x) = \lim_{x\to x_0+} p(x) = p(x_0).$$

   Därför blir

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x = 1$$

   och

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} = k - 1.$$

   Dessa vänster-och högergränsvärden ska alltså vara lika med funktionsvärdet i $x = 1$, dvs lika med $f(1) = 1$. Detta ger villkoret $k = 2$. Den sökta funktionen är alltså

$$f(x) = \begin{cases} x,\ x \le 1 \\ 2 - x, x > 1 \end{cases} .$$

2. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXERCISES 13, 14

   Funktionens extremvärden sökes bland de eventuella kritiska punkterna ($f'(x_0) = 0$), singulära punkterna ($f'(x_0)$ existerar ej) och definitionsmängdens ändpunkter. Den aktuella funktionen saknar kritiska punkter men har en singulär punkt i $x = 1$. Vi beräknar därför $f(1) = 1$ samt värdena i ändpunkterna $f(-1) = -1$, $f(2) = 0$. Med hjälp av grafen drar vi slutsatsen att $f(x) \ge -1$ samt $f(x) \le 1$ på hela intervallet. Alltså är $f(-1) = -1$ det absolut minsta värdet och $f(1) = 1$ det absolut största värdet. Ett lokalt minimum är $f(2) = 0$.

3. **Problemtyp:** Adams, Ch 5.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 5

$$\int_0^\infty \frac{3x^2\,dx}{(1+x^3)^2} = \Big[1 + x^3 = u,\ 3x^2\,dx = du\Big] = \int_1^\infty \frac{du}{u^2} = \int_1^\infty u^{-2} =$$

$$= -u^{-1}\Big|_1^\infty = -\frac{1}{u}\Big|_1^\infty = 0 - (-1) = 1.$$

4. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 17

   Definitionsområdet är $x \neq 0$. Nollställen är $x = -1$ och $x = 1$.

   Vertikal asymptot är $x = 0$ där $\lim_{x \to 0+} y = -\infty$ och $\lim_{x \to 0-} y = -\infty$.

   Vidare är $\lim_{x \to \pm\infty} y = 1-$ och det följer att $y = 1$ är en horisontell asymptot.

   $$f'(x) = \frac{2}{x^3}, x \neq 0,$$

   har inga nollställen så funktionen saknar extrempunkter.

   Ett enkelt sätt att analysera kurvan är att först rita grafen av standardfunktionen $\frac{1}{x^2}$, därefter spegla grafen med avseende på $x-$ axeln vilket ger grafen av $-\frac{1}{x^2}$ och slutligen translatera denna graf en enhet uppåt längs $y-$axeln vilket ger grafen av $1 - \frac{1}{x^2}$.

5. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXAMPLE 6, Ch 4.6 EXERCISES 31, 33

   Då $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $0 \leq x < \infty$ samt $f(0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ och t ex $f(1) > 0$ så har funktionen ett absolut maximum enligt en sats i Adams. Detta maximum återfinns i en kritisk punkt eller i en singulär punkt eller i ändpunkten $x = 0$. Då $f(0) = 0$ har $f(x)$ sitt största värde i en kritisk punkt eller i en singulär punkt.

   $$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2).$$

   Singulära punkter saknas alltså. De kritiska punkterna, där alltså $f'(x) = 0$, är $x = 0$ och $x = 2$. Då $f(0) = 0$ ges det största värdet av $x = 2$ och är lika med $\frac{4}{e^2}$.

6. **Problemtyp:** Adams, Ch 6.1 EXAMPLE 5, EXERCISE 5

   Integralen beräknas med partiell integration.

$$\int_0^1 x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$= (0 - 0) - \int_0^1 \frac{1}{2} x \, dx = -\frac{1}{4} x^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

7. **Problemtyp:** Adams, Ch 2.2 EXERCISES 45, 47, 49

   Låt den sökta x-koordinaten för tangenternas tangeringspunkt P vara $x = a$. Tangeringspunktens koordinater är alltså $P = (a, a^3)$. Linjen genom tangeringspunkten P och punkten $(1, 0)$ har lutningen

$$\frac{a^3}{a - 1} \qquad (1)$$

   enligt definitionen av lutning. Eftersom linjen är tangent till kurvan $y = x^3$ i P har den också lutningen

$$f'(a) = 3a^2 \qquad (2)$$

   Sätter vi uttrycken i (1) och (2) lika får vi ekvationen

$$\frac{a^3}{a - 1} = 3a^2$$

   som har rötterna $a = 0$ och $a = \dfrac{3}{2}$.

8. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.3 EXAMPLE 1, CH 4.10 EXERCISES 1,5,7 EXERCISES 17, 18 Ch 1.2 EXAMPLE 11, EXERCISE 75

   a) Vi försöker inte göra något smart här utan använder l'Hôpitals regel.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

   eftersom $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

   b) Inte heller här gör vi några smarta observationer utan använder l'Hôpitals regel två gånger.

   $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

   eftersom $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

   c) Eftersom $f'(x)$ existerar i en omgivning av origo samt $f(0) = 0$, $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ så är alltså Taylorpolynomet $P_1(x) = \dfrac{1}{2}x$ enligt formeln för polynomet.

   d) Eftersom funktionen approximeras av Taylorpolynomet $P_1(x) = \dfrac{1}{2}x$ nära origo kan vi approximera grafen av $f(x)$ med detta polynom i en liten omgivning av origo.

   e) Eftersom $|1-\cos x| \leq (|1| + |\cos x|)$ enligt triangelolikheten och $|\cos x| \leq 1$ följer att beloppet av täljaren alltid är ≤ 2. Eftersom $\dfrac{2}{|x|} \to 0$ då $x \to \pm\infty$ följer enligt Squeeze Theorem i Adams att

   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

   Alltså är x-axeln horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.