Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
DERIVATOR OCH INTEGRALER
ÖVNINGSTENTAMEN 1

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras *fullständiga lösningar*. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 5 timmar. **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1. $$f(x) = \begin{cases} x^2, \; x < 1 \\ 1, \; x = 1 \\ k - x^2, x > 1 \end{cases}.$$

   Bestäm k så att $f(x)$ blir kontinuerlig i $x = 1$ samt skissera grafen av $f(x)$ på intervallet $-2 \leq x \leq 2$. Är $f(x)$ deriverbar i $x = 1$? Motivera svaret.

2. Funktionen $f(x) = |x-2| + 1, \; -1 \leq x \leq 4$. Skissera grafen av $f(x)$ samt utnyttja denna för att bestämma funktionens lokala och absoluta extremvärden.

3. Skissera kurvan $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}, \; 0 \leq x \leq 1$, samt beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

   Ledning: $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ är bra hjälp vid kurvritningen. Integralen kan lämpligen beräknas med hjälp av substitutionen $u = 1 + x^2$.

4. Skissera kurvan
   $$y = \frac{(x-1)^2}{x} = x - 2 + \frac{1}{x}.$$
   Undersök särskilt definitionsmängden, nollställen, lokala extrempunkter samt vertikala, horisontella och sneda asymptoter.

5. Skissera grafen av
   $$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \; 0 \leq x < \infty,$$
   samt bestäm det absolut största värdet av funktionen.

   Ledning: Glöm inte att beakta $f(0)$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

6. Skissera kurvan $f(x) = x \ln x, \; 0 < x \leq 1$, samt beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 x \ln x\,dx$.

V.G.V!

7. Skissera kurvan $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Bestäm tangeringspunktens x-koordinat för den tangent till kurvan som går genom punkten $(1, 0)$.

8.
$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}, \; x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

a) Bevisa att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) Bevisa att $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$.

c) Motivera varför Taylorpolynomet $P_1(x)$ av $f(x)$ omkring origo av ordning 1 är $P_1(x) = x$.

d) Skissera grafen av $f(x)$ nära origo.

e) Bevisa att x-axeln är horisontell asymptot då $x \to \pm\infty$.

Ledning e): $|\sin x| \leq 1$ för alla reella tal x.

Taylorpolynomet $P_n(x)$ av ordning n för f omkring a

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Storleksordningar

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$