Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 1
DERIVATOR OCH INTEGRALER

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. **Problemtyp:** Adams, Ch 1.4 EXERCISES 17, 18

   Funktionen blir kontinuerlig i $x = 1$ om vi kan bestämma k så att

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1) = 1.$$

   Varje polynom $p(x)$ är en kontinuerlig funktion. Därför existerar både vänster-och högergränsvärdena i varje punkt x_0 och är lika med polynomets värde i x_0, dvs

$$\lim_{x\to x_0-} p(x) = \lim_{x\to x_0+} p(x) = p(x_0).$$

   Därför blir

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x^2 = 1$$

   och

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (k - x^2) = k - 1.$$

   Dessa vänster-och högergränsvärden ska alltså vara lika med funktionsvärdet i $x = 1$, dvs lika med $f(1) = 1$. Detta ger villkoret att $k - 1 = 1$, dvs $k = 2$. Den sökta funktionen är alltså

$$f(x) = \begin{cases} x^2,\ x < 1 \\ 1,\ x = 1 \\ 2 - x^2, x > 1 \end{cases}.$$

   Vänsterderivatan i $x = 1$ är $\lim_{x\to 1-} 2x = 2$ och högerderivatan i $x = 1$ är $\lim_{x\to 1+} (-2x) = -2$. Eftersom vänster-och högerderivatorna är olika är funktionen inte deriverbar i $x = 1$ som alltså är en singulär punkt.

2. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXERCISES 13, 14

   Funktionens extremvärden sökes bland de eventuella kritiska punkterna ($f'(x_0) = 0$), singulära punkterna ($f'(x_0)$ existerar ej) och definitionsmängdens ändpunkter. Den aktuella funktionen saknar kritiska punkter men har en singulär punkt i $x = 2$. (Funktionen är väsentligen $|x|$ som har en spets i origo.) Vi beräknar därför $f(2) = 1$ samt värdena i ändpunkterna $f(-1) = 4$, $f(4) = 3$. Med hjälp av grafen drar vi slutsatsen att $f(x) \geq 1$ samt $f(x) \leq 4$ på hela intervallet. Alltså är $f(2) = 1$ det absolut minsta värdet och $f(-1) = 4$ det absolut största värdet. Ett lokalt största värde är $f(4) = 3$.

3. **Problemtyp:** Adams, Ch 5.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 5

   $f(0) = 0, f'(0) = 1, f'(1) = 0, f'(x) > 0, 0 < x < 1, f(1) = \dfrac{1}{2}$ stadgar upp grafskissen.

   $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \Big[1 + x^2 = u,\ 2x\,dx = du\Big] = \int_1^2 \frac{1}{2}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

4. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 17

   Definitionsområdet är $x \neq 0$. Eftersom täljaren i

   $$y = \frac{(x-1)^2}{x} = x - 2 + \frac{1}{x}$$

   är $(x-1)^2$ har funktionen det dubbla nollstället $x = 1$.

   Vertikal asymptot är $x = 0$ där $\lim\limits_{x\to 0+} y = +\infty$ och $\lim\limits_{x\to 0-} y = -\infty$.

   Vidare är $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y - (x-2)) = 0\pm$ och det följer att $y = x - 2$ är en sned asymptot.

   $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

   har dels nollstället $x = -1$, som ger en lokal maximipunkt $= -4$, samt nollstället $x = 1$, som ger en lokal minimipunkt $= 0$, t ex enligt derivatans teckenväxling. Kurvan tangerar x-axeln i $x = 1$.

5. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXAMPLE 6, Ch 4.6 EXERCISES 31, 33

   Då $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $0 \leq x < \infty$ samt $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ och t ex $f(1) > 0$ så har funktionen ett absolut maximum enligt en sats i Adams (Adams Gift). Denna återfinns i en kritisk punkt eller i en singulär punkt eller i ändpunkten $x = 0$. Då $f(0) = 0$ har $f(x)$ sitt största värde i en kritisk punkt eller i en singulär punkt.

   $$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2), -\infty < x < \infty.$$

   De kritiska punkterna, där alltså $f'(x) = 0$, är $x = \pm 1$. Den enda kritiska punkten i intervallet $0 < x < \infty$ är $x = 1$.

   Då funktionen saknar singulära punkter finner vi det största värdet i den kritiska punkten $x = 1$. Det största värdet är alltså $f(1) = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

6. **Problemtyp:** Adams, Ch 6.1 EXAMPLE 5, EXERCISE 5

   Grafskissen stöds av

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0, f(1) = 0, f'(x) = \ln x + 1, \lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty, f'(\frac{1}{e}) = 0.$$

   Vi observerar särskilt att $f(x) < 0$ för $0 < x < 1$ så vi förväntar oss en negativ integral. Integralen beräknas med partiell integration.

$$\int_0^1 x\ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= (0-0) - \int_0^1 \frac{1}{2}x\, dx = -\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

7. **Problemtyp:** Adams, Ch 2.2 EXERCISES 45, 47, 49

   Grafskissen stöds av

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty, \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0+, f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^{3/2}}.$$

   Låt den sökta x-koordinaten för tangentens tangeringspunkt P vara $x = a$. Tangeringspunktens koordinater är alltså $P = (a, \frac{1}{\sqrt{a}})$. Linjen genom tangeringspunkten P och punkten $(1, 0)$ på x-axeln har lutningen

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - 0}{a - 1} \qquad (1)$$

   enligt definitionen av lutning. Eftersom linjen är tangent till kurvan $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ i P har den också lutningen

$$f'(a) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^{3/2}} \qquad (2)$$

   Sätter vi uttrycken i (1) och (2) lika får vi ekvationen

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{a-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^{3/2}}$$

   som har roten $a = \dfrac{1}{3}$.

8. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.3 EXAMPLE 1, CH 4.10 EXERCISES 1,5,7 EXERCISES 17, 18 Ch 1.2 EXAMPLE 11, EXERCISE 75

a) Vi försöker inte göra något smart här utan använder l'Hôpitals regel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{1} = 0$$

eftersom $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

b) Inte heller här gör vi några smarta observationer utan använder l'Hôpitals regel två gånger.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \cos x - \sin x \sin x}{1} = 1$$

eftersom $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

c) Eftersom $f'(x)$ existerar i en omgivning av origo samt $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ så är alltså Taylorpolynomet $P_1(x) = x$ enligt formeln för polynomet.

d) Eftersom funktionen approximeras av Taylorpolynomet $P_1(x) = x$ nära origo kan vi approximera grafen av $f(x)$ med detta polynom i en liten omgivning av origo.

e) Eftersom $|\sin x| \le 1$ för alla reella tal x har vi uppskattningen

$$\left|\frac{\sin^2 x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}.$$

Då $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ följer av "The Squeeze Theorem" i Adams att

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = 0,$$

dvs x-axeln är horisontell asymptot.