Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
DERIVATOR OCH INTEGRALER
ÖVNINGSTENTAMEN 2

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras *fullständiga lösningar*. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 5 timmar. **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1.
$$f(x) = \begin{cases} x-k, \ x<2 \\ 2-k, \ x=2 \\ 1-kx, x>2 \end{cases}.$$

Bestäm k så att $f(x)$ blir kontinuerlig i $x=2$ samt skissera grafen av $f(x)$ på intervallet $0 \le x \le 4$. Är $f(x)$ deriverbar i $x=2$? Motivera svaret.

2. Funktionen $f(x) = |x^2-4|, \ -3 \le x \le 3$. Skissera grafen av $f(x)$ samt utnyttja denna för att bestämma funktionens absolut största värde samt eventuella lokala maximivärden.

3. Skissera kurvan $f(x) = x\sqrt{1-x^2}, \ 0 \le x \le 1$, samt beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

   Ledning: $f'(x) = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ är bra hjälp vid kurvritningen. Integralen kan lämpligen beräknas med hjälp av substitutionen $u = 1-x^2$.

4. Skissera kurvan
$$y = \frac{x^3}{x-1} = x^2+x+1+\frac{1}{x-1}.$$
   Undersök särskilt definitionsmängden, nollställen, lokala extrempunkter samt vertikala asymptoter.

5. Skissera grafen av
$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}, \ 0 < x < \infty,$$
   samt bestäm det absolut minsta värdet av funktionen.

   Ledning: Glöm inte att beakta $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

6. Skissera kurvan $f(x) = \ln(x+1)$, $0 \le x \le 1$, samt beräkna integralen

$$\int_0^1 \ln(x+1)\,dx.$$

Ledning: $\ln(1+x)$ kan skrivas som en produkt: $\ln(1+x) = 1 \cdot \ln(x+1)$. Vi behöver också utyttja $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.

7. Skissera kurvan $y = \dfrac{1}{x}$, $0 < x < \infty$. Bestäm tangeringspunktens x-koordinat för den tangent till kurvan som går genom punkten $(1, 0)$.

8.
$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

a) Bevisa att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) Bevisa att $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{1}{2}$.

c) Motivera varför Taylorpolynomet $P_1(x)$ av $f(x)$ omkring origo av ordning 1 är $P_1(x) = \dfrac{1}{2}x$.

d) Skissera grafen av $f(x)$ nära origo.

e) Bevisa att $x = \pi$ är vertikal asymptot då $x \to \pi\pm$.

Taylorpolynomet $P_n(x)$ av ordning n för f omkring a

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Storleksordningar

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$