Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 2
DERIVATOR OCH INTEGRALER

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. **Problemtyp:** Adams, Ch 1.4 EXERCISES 17, 18

Funktionen blir kontinuerlig i $x = 2$ om vi kan bestämma k så att

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2) = 2 - k.$$

Varje polynom $p(x)$ är en kontinuerlig funktion. Därför existerar både vänster-och högergränsvärdena i varje punkt x_0 och är lika med polynomets värde i x_0, dvs

$$\lim_{x \to x_0-} p(x) = \lim_{x \to x_0+} p(x) = p(x_0).$$

Därför blir

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} x - k = 2 - k$$

och

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (1 - kx) = 1 - 2k.$$

Dessa vänster-och högergränsvärden ska alltså vara lika med funktionsvärdet i $x = 2$, dvs lika med $f(2) = 2 - k$. Detta ger villkoret att $2 - k = 1 - 2k$, dvs $k = -1$. Den sökta funktionen är alltså

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \ x < 2 \\ 3, \ x = 2 \\ 1 + x, x > 2 \end{cases}$$

vilket är den räta linjen $y = 1 + x$ som är deriverbar för alla x. Funktionen är alltså speciellt deriverbar i $x = 2$.

2. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXERCISES 13, 14

Funktionens extremvärden sökes bland de eventuella kritiska punkterna ($f'(x_0) = 0$), singulära punkterna ($f'(x_0)$ existerar ej) och definitionsmängdens ändpunkter. För att underlätta att skissa grafen kan vi presentera funktionen som

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, \ |x| > 2 \\ 0, \ x = \pm 2 \\ x^2 - 4, |x| < 2 \end{cases}$$

Denna funktion har singulära punkter i $x = \pm 2$ men i övrigt är derivatan väldefinierad som

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, \ |x| > 2 \\ 2x, |x| < 2 \end{cases}$$

Den aktuella funktionen har alltså endast en kritisk punkt i $x = 0$, dvs $f'(0) = 0$ samt singulär punkter i $x = \pm 2$. Vi beräknar därför värdet i $x = 0$ och finner $f(0) = 4$ samt värdena i de singulära punkterna vilket ger $f(-2) = f(2) = 0$. Vi måste också beräkna värdena i definitionsmängdens ändpunkter ± 3. Vi finner att $f(-3) = f(3) = 5$. Det absolut största värdet är alltså $f(\pm 3) = 5$. Med hjälp av grafen drar vi slutsatsen att $f(0) = 4$ är ett lokalt största värde.

3. **Problemtyp:** Adams, Ch 5.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 15

   $f(0) = 0, f'(0) = 1, f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0, \lim_{x \to 1-} f'(x) = -\infty$ stadgar upp grafskissen.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \Big[1 - x^2 = u,\ -2x\,dx = du\Big] = \int_1^0 -\frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

4. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 11

   Definitionsområdet är $x \neq 1$. Eftersom täljaren i

$$y = \frac{x^3}{x-1}$$

är x^3 har funktionen det trippla nollstället $x = 0$. I närheten av origo uppför sig funktionen som $-x^3$ har alltså en inflexionspunkt i $x = 0$.

Vertikal asymptot är $x = 1$ där $\lim_{x \to 1+} y = +\infty$ och $\lim_{x \to 1-} y = -\infty$.

$$f'(x) = 2x^2 \frac{x - \frac{3}{2}}{(x-1)^2}$$

som ger en lokal minimipunkt $= f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{4}$ i $x = \frac{3}{2}$ samt en inflexionspunkt i $x = 0$.

5. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXAMPLE 5, Ch 4.6 EXERCISES 31, 33

   Då $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $0 < x < \infty$ samt $\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ så har funktionen ett absolut minimum enligt en sats i Adams (Adams Gift). Detta återfinns i en kritisk punkt eller i en singulär punkt.

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}, 0 < x < \infty.$$

Den enda kritiska punkten, där alltså $f'(x) = 0$, är $x = 2$. Då funktionen saknar singulära punkter finner vi det minsta värdet i den kritiska punkten $x = 2$. Det minsta värdet är alltså $f(2) = 3$.

6. **Problemtyp:** Adams, Ch 6.1 EXAMPLE 2, EXERCISE 5

   Grafskissen stöds av
$$f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

   Integralen beräknas med partiell integration.

$$\int_0^1 1 \cdot \ln(1+x)\, dx = x \cdot \ln(1+x)|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{1+x}\, dx =$$
$$= (\ln 2 - 0) - \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x})\, dx = \ln 2 - (x - \ln(1+x))|_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - 1.$$

7. **Problemtyp:** Adams, Ch 2.2 EXERCISES 45, 47, 49

   Grafskissen är ena grenen av den välkända hyperbeln.

   Låt den sökta x-koordinaten för tangentens tangeringspunkt P vara $x = a$. Tangeringspunktens koordinater är alltså $P = (a, \frac{1}{a})$. Linjen genom tangeringspunkten P och punkten $(1, 0)$ på x-axeln har lutningen
$$\frac{\frac{1}{a} - 0}{a - 1} \qquad (1)$$

   enligt definitionen av lutning. Eftersom linjen är tangent till kurvan $y = \frac{1}{x}$ i P har den också lutningen
$$f'(a) = -\frac{1}{a^2} \qquad (2)$$

   Sätter vi uttrycken i (1) och (2) lika får vi ekvationen
$$\frac{\frac{1}{a}}{a-1} = -\frac{1}{a^2}$$

   som har roten $a = \frac{1}{2}$.

8. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.3 EXAMPLE 1, CH 4.10 EXERCISES 1,5,7 EXERCISES 17, 18 Ch 4.6 vertikal asymptot

   a) Vi försöker inte göra något smart här utan använder l'Hôpitals regel.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

   eftersom $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

   b) Inte heller här gör vi några smarta observationer utan använder l'Hôpitals regel två gånger.

   $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x\cos x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x - x\sin x + \cos x} = \frac{1}{2}$$

   eftersom $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

   c) Eftersom $f'(x)$ existerar i en omgivning av origo samt $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ så är alltså Taylorpolynomet $P_1(x) = \frac{1}{2}x$ enligt formeln för polynomet.

   d) Eftersom funktionen approximeras av Taylorpolynomet $P_1(x) = \frac{1}{2}x$ nära origo kan vi approximera grafen av $f(x)$ med detta polynom i en liten omgivning av origo.

   e) Eftersom $1-\cos x$ ligger nära 2 i en omgivning av $x = \pi$ och $\sin x$ växlar tecken från $0+$ till $0-$ då x passerar π är $x = \pi$ vertikal asymptot, dvs $\lim_{x\to\pi\mp} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \pm\infty$.