Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
DERIVATOR OCH INTEGRALER
ÖVNINGSTENTAMEN 3

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras *fullständiga lösningar*. 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 5 timmar. **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + k, \ x < 1 \\ 1 + k, \ x = 1 \\ k(1+x), x > 1 \end{cases} .$$

   Bestäm det värde på k för vilket $f(x)$ blir kontinuerlig i $x = 1$ samt skissera grafen av $f(x)$ för detta k på intervallet $0 \leq x \leq 2$.

2. Funktionen $f(x) = 3 - |x - 1|, \ 0 \leq x \leq 4$. Skissera grafen av $f(x)$ samt utnyttja denna för att bestämma funktionens absolut största och minsta värden.

3. Skissera kurvan $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}, \ 0 \leq x < \infty$, samt beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

   Ledning: $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^3}$ är bra hjälp vid kurvritningen. Integralen kan lämpligen beräknas med hjälp av substitutionen $u = 1 + x^2$.

4. Skissera kurvan
$$y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

   Undersök särskilt definitionsmängden, nollställen, lokala extrempunkter samt vertikala och horisontella asymptoter.

   Ledning: $f'(x) = -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$.

5. Skissera grafen av
$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x}, \ 0 \leq x < \infty,$$

   samt bestäm det absolut största värdet av funktionen.

   Ledning: Glöm inte att beakta att $f(0) = 1$ och att $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. $f'(x) = (x-1)(3-x)e^{-x}$. Utnyttja också olikheten $2 < e < 3$.

6. Skissera kurvan $f(x) = (\ln x)^2$, $0 < x < \infty$ samt beräkna integralen

$$\int_1^e (\ln x)^2 \, dx.$$

Ledning: $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{\ln x}{x}$, $f''(x) = 2 \cdot \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ stadgar upp kurvritningen. För att integrera observerar vi att $f(x) = (\ln x)^2$ kan skrivas som en produkt: $(\ln x)^2 = 1 \cdot (\ln x)^2$.

7. Skissera kurvan $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Bestäm tangeringspunkternas respektive x-koordinat för de två tangenter till kurvan som går genom punkten $(1, -1)$.

8. $$f(x) = \frac{\sin x - x}{x^2}, \; x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

   a) Bevisa att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

   b) Bevisa att $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\dfrac{1}{6}$.

   c) Motivera varför Taylorpolynomet $P_1(x)$ av $f(x)$ omkring origo av ordning 1 är $P_1(x) = -\dfrac{1}{6}x$.

   d) Skissera grafen av $f(x)$ nära origo.

   e) Bevisa att x-axeln är asymptot då $x \to \pm\infty$.

Taylorpolynomet $P_n(x)$ av ordning n för f omkring a

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Storleksordningar

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$