Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 3
DERIVATOR OCH INTEGRALER

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. **Problemtyp:** Adams, Ch 1.4 EXERCISES 17, 18

   Funktionen blir kontinuerlig i $x = 1$ om vi kan bestämma k så att

   $$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1) = 1 + k.$$

   Varje polynom $p(x)$ är en kontinuerlig funktion. Därför existerar både vänster-och högergränsvärdena i varje punkt x_0 och är lika med polynomets värde i x_0, dvs

   $$\lim_{x\to x_0-} p(x) = \lim_{x\to x_0+} p(x) = p(x_0).$$

   I vårt fall erhåller vi därför

   $$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x^2 + k = 1 + k$$

   och

   $$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} k(1 + x) = k \cdot 2.$$

   Dessa gränsvärden är lika och lika med funktionsvärdet $f(1) = 1+k$ om $k = 1$. Funktionen är alltså kontinuerlig för $k = 1$.

2. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXERCISES 13, 14

   Funktionens extremvärden sökes bland de eventuella kritiska punkterna ($f'(x_0) = 0$), singulära punkterna ($f'(x_0)$ existerar ej) och definitionsmängdens ändpunkter. Den aktuella funktionen saknar kritiska punkter men har en singulär punkt i $x = 1$. (Funktionen är väsentligen $|x|$ som har en spets i origo.) Vi beräknar därför $f(1) = 3$ samt värdena i ändpunkterna $f(0) = 2$, $f(4) = 0$. Med hjälp av grafen drar vi slutsatsen att $f(x) \leq 3$ samt $f(x) \geq 0$ på hela intervallet. Alltså är $f(1) = 3$ det absolut största värdet och $f(0) = 0$ det absolut minsta värdet. Ett lokalt minsta värde är $f(0) = 2$.

3. **Problemtyp:** Adams, Ch 5.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 15

   $f(0) = 0, f'(0) = 1, f'(1) = 0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0+$ stadgar upp grafskissen.

   $$\int_0^\infty \frac{x}{(1 + x^2)^2}\, dx = \Big[1 + x^2 = u,\ 2x\, dx = du\Big] = \int_1^\infty \frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\, du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2}.$$

4. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 11

   Definitionsområdet är $x \neq 1$.

   Vertikal asymptot är $x = 1$ där $\lim_{x \to 1+} y = +\infty$ och $\lim_{x \to 1-} y = +\infty$.

   Horisontell asymptot är x-axeln eftersom $\lim_{x \to \pm\infty} y = 0 \pm$.

$$f'(x) = -\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

   som ger en lokal minimipunkt $= f(-1) = -\frac{1}{4}$ i $x = -1$.

5. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXAMPLE 5, Ch 4.6 EXERCISES 31, 33

   $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $0 \leq x < \infty$. På det slutna intervallet $0 \leq x \leq 1$ har funktionen ett absolut maximum enligt en sats i Adams. Eftersom vidare $\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ så har funktionen ett absolut maximum på det öppna intervallet $1 < x < \infty$ enligt satsen som vi kallar Adams Gift. Det gäller nu att avgöra vilket av dessa maxima som är absolut störst. Vi letar efter detta bland de kritiska punkterna, de singulära punkterna och i ändpunkten $x = 0$.

$$f'(x) = (x-1)(3-x)e^{-x}.$$

   Funktionen saknar singulära punkter. De kritiska punkterna är $x = 1$ och $x = 3$. $f(1) = 0$ och ger det minsta värdet, $f(3) = 4e^{-3} = \frac{4}{e^3} < \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2}$. Vi måste också undersöka ändpunkten $x = 0$. Där är $f(0) = 1$ som alltså i detta fall ger det största värdet.

6. **Problemtyp:** Adams, Ch 6.1 EXAMPLE 2, EXERCISE 5

   Grafskissen stöds av

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty, f(1) = 0, f'(1) = 0, f''(e) = 0.$$

   Integralen beräknas med partiell integration två gånger.

$$\int_1^e 1 \cdot \ln^2 x \, dx = x \cdot \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$
$$= (e - 0) - \int_1^e 2 \cdot \ln x \, dx = e - 2 \int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx = e - 2$$

   eftersom

$$\int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx = (e - 0) - \int_1^e 1 \, dx = 1 - (e - 1) = 1.$$

7. **Problemtyp:** Adams, Ch 2.2 EXERCISES 45, 47, 49

   Grafskissen är den välkända hyperbeln.

   Låt den sökta x-koordinaten för respektive tangents tangeringspunkt P vara $x = a$. Tangeringspunktens koordinater är alltså $P = (a, \frac{1}{a})$. Linjen genom tangeringspunkten P och punkten $(1, -1)$ har lutningen

$$\frac{\frac{1}{a} + 1}{a - 1} \qquad (1)$$

   enligt definitionen av lutning. Eftersom linjen är tangent till kurvan $y = \frac{1}{x}$ i P har den också lutningen

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2} \qquad (2)$$

   Sätter vi uttrycken i (1) och (2) lika får vi ekvationen

$$\frac{\frac{1}{a} + 1}{a - 1} = -\frac{1}{a^2}$$

   som kan förenklas till

$$a^2 + 2a - 1 = 0$$

   med rötterna $a = -1 \pm \sqrt{2}$.

8. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.3 EXAMPLE 1, CH 4.10 EXERCISES 1,5,7 EXERCISES 17, 18 Ch 4.6 horisontell asymptot

   a) Vi försöker inte göra något smart här utan använder l'Hôpitals regel.

   $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0$$

   eftersom $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

   b) Inte heller här gör vi några smarta observationer utan använder l'Hôpitals regel.

   $$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3\cdot 2} = -\frac{1}{6}$$

   eftersom $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

   c) Eftersom $f'(x)$ existerar i en omgivning av origo samt $f(0) = 0$, $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$ så är alltså Taylorpolynomet $P_1(x) = -\dfrac{1}{6}x$ enligt formeln för polynomet.

   d) Eftersom funktionen approximeras av Taylorpolynomet $P_1(x) = -\dfrac{1}{6}x$ nära origo kan vi approximera grafen av $f(x)$ med detta polynom i en liten omgivning av origo.

   e) Eftersom $|\sin x| \leq 1$ för alla x finner vi på samma sätt som i Övningstentamen 1, Problem 8e) att $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = 0\mp$, dvs x-axeln är horisontell asymptot.