Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
DERIVATOR OCH INTEGRALER
ÖVNINGSTENTAMEN 4

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras *fullständiga lösningar.* 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 5 timmar. **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1.
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + k, \; x < 2 \\ 1 + k, \; x = 2 \\ kx + 1, x > 2 \end{cases} .$$
Bestäm det värde på k för vilket $f(x)$ blir kontinuerlig i $x = 2$ samt skissera grafen av $f(x)$ för detta k på intervallet $0 \leq x \leq 4$.

2. Funktionen $f(x) = |(x-1)^2 - 1| = |x(x-2)|$, $-1 \leq x \leq 3$. Skissera grafen av $f(x)$ samt utnyttja denna för att bestämma funktionens absolut största och minsta värden.

3. Skissera kurvan $f(x) = x \sin x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi/2}$, samt beräkna integralen
$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin x^2 \, dx.$$
Ledning: $f'(x) = \sin x^2 + 2x^2 \cos x^2$, $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$, $0 < x < \sqrt{\pi/2}$, $f'(\sqrt{\pi/2}) = 1$, $f(x) = x^3$ (för små x) är bra hjälp vid kurvritningen. Integralen kan lämpligen beräknas med hjälp av substitutionen $u = x^2$.

4. Skissera kurvan
$$y = \frac{(x-1)^2}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$
Undersök särskilt definitionsmängden, nollställen, lokala extrempunkter samt vertikala och horisontella asymptoter.

Ledning: $f'(x) = 2\dfrac{x-1}{x^3}$.

5. Skissera grafen av
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \; 1 \leq x < \infty$$
samt bestäm det absolut största värdet av funktionen.

Ledning: Glöm inte beakta $f(1) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

6. Skissera kurvan $f(x) = xe^{-x}$, $0 \leq x < \infty$ samt beräkna integralen

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx.$$

Ledning: $f'(x) = e^{-x}(1-x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ stadgar upp kurvritningen. För att integrera bör man tänka efter noga vilken av faktorerna x eller e^{-x} man bör integrera först.

7. Skissera kurvan $y = \dfrac{1}{x^2}$, $0 < x < \infty$. Bestäm tangeringspunktens x-koordinat för den tangent till kurvan som går genom punkten $(1,0)$.

8.

$$f(x) = \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x},\ x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

a) Bevisa att $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

b) Bevisa att $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$.

c) Motivera varför Taylorpolynomet $P_1(x)$ av $f(x)$ omkring origo av ordning 1 är $P_1(x) = x$.

d) Skissera grafen av $f(x)$ nära origo.

e) Bevisa att x-axeln är asymptot då $x \to \pm\infty$.

Taylorpolynomet $P_n(x)$ av ordning n för f omkring a

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Storleksordningar

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$