Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 4
DERIVATOR OCH INTEGRALER

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. **Problemtyp:** Adams, Ch 1.4 EXERCISES 17, 18

   Funktionen blir kontinuerlig i $x = 2$ om vi kan bestämma k så att

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = f(2) = 1 + k.$$

   Varje polynom $p(x)$ är en kontinuerlig funktion. Därför existerar både vänster-och högergränsvärdena i varje punkt x_0 och är lika med polynomets värde i x_0, dvs

$$\lim_{x\to x_0-} p(x) = \lim_{x\to x_0+} p(x) = p(x_0).$$

   I vårt fall erhåller vi därför

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x-1)^2 + k = 1 + k$$

   och

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} kx + 1 = 2k + 1.$$

   Dessa gränsvärden är lika och lika med funktionsvärdet $f(2) = 1+k$ om $k = 0$. Funktionen är alltså kontinuerlig för $k = 0$, dvs

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2,\ x < 2 \\ 1,\ x = 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}.$$

2. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXERCISES 13, 14

   Funktionens extremvärden sökes bland de eventuella kritiska punkterna ($f'(x_0) = 0$), singulära punkterna ($f'(x_0)$ existerar ej) och definitionsmängdens ändpunkter. Eftersom $x(x-2) > 0$ för $x < 0, x > 2$ och $x(x-2) < 0$ för $0 < x < 2$ underlättar det att presentera funktionen som

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1,\ x < 0,\ x > 2 \\ 0,\ x = 0, x = 2 \\ (x-1)^2 - 1,\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

   Denna funktion har singulära punkter i $x = 0$ och $x = 2$ men i övrigt är derivatan väldefinierad som

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2,\ x < 0, x > 2 \\ 2x - 2, 0 < x < 2 \end{cases}$$

Den aktuella funktionen har alltså endast en kritisk punkt i $x = 1$, dvs $f'(1) = 0$ samt singulära punkter i $x = 0$ och $x = 2$. Vi beräknar därför värdet i $x = 1$ och finner $f(1) = 1$ samt värdena i de singulära punkterna vilket ger $f(0) = f(2) = 0$. Vi måste också beräkna värdena i definitionsmängdens ändpunkter $x = -1$ och $x = 3$. Vi finner att $f(-1) = f(3) = 3$. Det absolut största värdet är alltså $= 3$. Med hjälp av grafen drar vi slutsatsen att $f(1) = 1$ är ett lokalt största värde.

3. **Problemtyp:** Adams, Ch 5.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 15

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \sin x^2\, dx = \left[x^2 = u,\ 2x\, dx = du\right] = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin u\, du = \frac{1}{2} \cdot (-\cos u)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

4. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 11

   Definitionsområdet är $x \neq 0$.

   Vertikal asymptot är $x = 0$ där $\lim_{x\to 0+} y = +\infty$ och $\lim_{x\to 0-} y = +\infty$.

   Horisontell asymptot är $y = 1$ eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} y = 1-$.

$$f'(x) = 2\frac{x-1}{x^3}$$

   som ger en lokal minimipunkt $f(1) = 0$.

   Kurvan skär sin asymptot $y = 1$ i punkten $(\frac{1}{2}, 1)$. Vid kurvritningen upptäcker man att det borde bli en inflexionspunkt till höger om $x = 1$. Andraderivatan $f''(x) = 2\frac{3-2x}{x^4}$ med nollstället $x = \frac{3}{2}$ bekräftar detta.

5. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXAMPLE 5, Ch 4.6 EXERCISES 31, 33

   $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $1 \leq x < \infty$. Eftersom $f(1) = 0$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ så har funktionen ett absolut maximum på intervallet $1 \leq x < \infty$ enligt THEOREM 8, CH 4, som vi kallar Adams Gift. Vi letar efter största värdet bland de kritiska punkterna, de singulära punkterna och i ändpunkten $x = 1$. Då $f(1) = 0$ är detta inte största värdet.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

   Funktionen saknar singulära punkter. Den kritiska punkten är $x = e$ och största värdet är alltså $f(e) = \frac{1}{e}$.

6. **Problemtyp:** Adams, Ch 6.1 EXAMPLE 2, EXERCISE

   Integralen beräknas med partiell integration där e^{-x} integreras först.

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot x\,dx = (-e^{-x}) \cdot x\big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-x}) \cdot 1\,dx =$$

$$= (0+0) + \int_0^\infty e^{-x}\,dx = (-e^{-x}\big|_0^\infty = 1.$$

7. **Problemtyp:** Adams, Ch 2.2 EXERCISES 45, 47, 49

   Låt den sökta x-koordinaten för tangentens tangeringspunkt P vara $x = a$. Tangeringspunktens koordinater är alltså $P = (a, \dfrac{1}{a^2})$. Linjen genom tangeringspunkten P och punkten $(1,0)$ har lutningen

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{a-1} \qquad (1)$$

   enligt definitionen av lutning. Eftersom linjen är tangent till kurvan $y = \dfrac{1}{x^2}$ i P har den också lutningen

$$f'(a) = -\frac{2}{a^3} \qquad (2)$$

   Sätter vi uttrycken i (1) och (2) lika får vi ekvationen

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{a-1} = -\frac{2}{a^3}$$

   med lösningen $a = \dfrac{2}{3}$.

8. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.3 EXAMPLE 1, CH 4.10 EXERCISES 1,5,7 EXERCISES 17, 18 Ch 4.6 horisontell asymptot

a) Vi försöker inte göra något smart här utan använder l'Hôpitals regel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2xe^{-x^2} + 4xe^{-2x^2}}{1} = 0.$$

b) Inte heller här gör vi några smarta observationer utan använder l'Hôpitals regel.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - e^{-2x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2xe^{-x^2} + 4xe^{-2x^2}}{2x} =$$

$$= [\text{förkorta med } x] = \lim_{x \to 0} \frac{-2e^{-x^2} + 4e^{-2x^2}}{2} = 1.$$

c) Eftersom $f'(x)$ existerar i en omgivning av origo samt $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ så är alltså Taylorpolynomet $P_1(x) = x$ enligt formeln för polynomet.

d) Eftersom funktionen approximeras av Taylorpolynomet $P_1(x) = x$ nära origo kan vi approximera grafen av $f(x)$ med detta polynom i en liten omgivning av origo.

e) Eftersom $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-ax^2} = 0, a = 1,\ a = 2$ och vi dessutom multiplicerar med $\dfrac{1}{x}$ som också går mot 0 då $x \to \pm\infty$ gäller att $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\pm$, dvs x-axeln är horisontell asymptot.