Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

TENTAMEN
DERIVATOR OCH INTEGRALER
ÖVNINGSTENTAMEN 5

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras *fullständiga lösningar.* 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 5 timmar. **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1. $$f(x) = \begin{cases} x+k, \; x<1 \\ 1+k, \; x=1 \\ k(1+x), x>1 \end{cases} .$$

   Bestäm k så att $f(x)$ blir kontinuerlig i $x=1$ samt skissera grafen av $f(x)$ på intervallet $-2 \le x \le 2$.

2. Funktionen $f(x) = |x-1| - 2, \; -1 \le x \le 3$. Skissera grafen av $f(x)$ samt utnyttja denna för att bestämma funktionens lokala och absoluta extremvärden.

3. Skissera kurvan $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}, \; 1 \le x \le 4$, samt beräkna integralen $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$.

   Ledning: Funktionen är strikt avtagande stadgar upp kurvritningen. Integralen kan lämpligen beräknas med hjälp av substitutionen $\sqrt{x} = u$, dvs $x = u^2, \; dx = 2u\,du$.

4. Skissera kurvan
$$y = \frac{(x-1)^2}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$
   Undersök särskilt definitionsmängden, nollställen, lokala extrempunkter, vertikala och horisontella asymptoter samt inflexionspunkter..

   Ledning: $f'(x) = 2\dfrac{x-1}{x^3}, \; f''(x) = 4\dfrac{x-\frac{3}{2}}{x^4}$.

5. Skissera grafen av
$$f(x) = x^2 e^{-x}, \; 0 \le x < \infty,$$
   samt bestäm det absolut största värdet av funktionen.

   Ledning: Glöm inte att beakta att $f(0) = 0$ och $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

6. Skissera kurvan $f(x) = \sqrt{x}\ln x, \; 0 < x \le 1$, samt beräkna integralen $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx$.

V.G.V!

7. Skissera kurvan $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$. Bestäm tangeringspunkternas respektive x-koordinat för de två tangenter till kurvan som går genom punkten $(1, 1)$.

8.
$$f(x) = \frac{(e^{-x} - 1)^2}{x}, \; x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

a) Bevisa att $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) Bevisa att $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = 1$.

c) Motivera varför Taylorpolynomet $P_1(x)$ av $f(x)$ omkring origo av ordning 1 är $P_1(x) = x$.

d) Skissera grafen av $f(x)$ nära origo.

e) Bevisa att x-axeln är horisontell asymptot då $x \to +\infty$.

Taylorpolynomet $P_n(x)$ av ordning n för f omkring a

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Storleksordningar

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to 0+} x^a \ln x = 0, \quad a > 0.$$