Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

ÖVNINGSTENTAMEN 5
DERIVATOR OCH INTEGRALER

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. **Problemtyp:** Adams, Ch 1.4 EXERCISES 17, 18

   Funktionen blir kontinuerlig i $x = 1$ om vi kan bestämma k så att
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1) = 1 + k.$$
   Varje polynom $p(x)$ är en kontinuerlig funktion. Därför existerar både vänster-och högergränsvärdena i varje punkt x_0 och är lika med polynomets värde i x_0, dvs
$$\lim_{x\to x_0-} p(x) = \lim_{x\to x_0+} p(x) = p(x_0).$$
   Därför blir
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x + k = 1 + k$$
   och
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} k(1 + x) = k(1 + 1) = 2k.$$
   Dessa vänster-och högergränsvärden ska alltså vara lika med funktionsvärdet i $x = 1$, dvs lika med $f(1) = 1+k$. Detta ger villkoret att $1+k = 2k$, dvs $k = 1$. Den sökta funktionen är alltså
$$f(x) = \begin{cases} x+1,\ x<1 \\ 2,\ x=1 \\ 1+x, x>1 \end{cases}.$$

2. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXERCISES 13, 14

   Funktionens extremvärden sökes bland de eventuella kritiska punkterna ($f'(x_0) = 0$), singulära punkterna ($f'(x_0)$ existerar ej) och definitionsmängdens ändpunkter. Den aktuella funktionen saknar kritiska punkter men har en singulär punkt i $x = 1$. (Funktionen är väsentligen $|x|$ som har en spets i origo.) Vi beräknar därför $f(1) = -2$ samt värdena i ändpunkterna $f(-1) = 0$, $f(3) = 0$. Med hjälp av grafen drar vi slutsatsen att $f(x) \geq -2$ samt $f(x) \leq 0$ på hela intervallet. Alltså är $f(1) = -2$ det absolut minsta värdet och $f(-1) = f(3) = 0$ det absolut största värdet.

3. **Problemtyp:** Adams, Ch 5.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 5
$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x}} = \left[\sqrt{x} = u,\, x = u^2,\, dx = 2u\,du\right] = \int_1^2 \frac{2u\,du}{u(1+u)} = \int_1^2 \frac{2du}{1+u} =$$
$$= 2\ln(1+u)\big|_1^2 = 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln\frac{3}{2}.$$

4. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.6 EXAMPLE 6, EXERCISE 17

   Definitionsområdet är $x \neq 0$. Eftersom täljaren i

$$y = \frac{(x-1)^2}{x^2} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

   är $(x-1)^2$ har funktionen det dubbla nollstället $x = 1$.

   Vertikal asymptot är $x = 0$ där $\lim_{x \to 0+} y = +\infty$ och $\lim_{x \to 0-} y = +\infty$.

   Vidare är $\lim_{x \to \pm\infty} (y-1) = 0\mp$ och det följer att $y = 1$ är en horisontell asymptot.

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{x-1}{x^3}$$

   har nollstället $x = 1$, som ger en lokal minimipunkt $= 0$ som också är det absolut minsta värdet. Kurvan tangerar x-axeln i $x = 1$.

   $f''(x) = 4\dfrac{x - \frac{3}{2}}{x^4}$ ger att $x = \dfrac{3}{2}$ är en inflexionspunkt.

5. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.4 EXAMPLE 6, Ch 4.6 EXERCISES 31, 33

   Då $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $0 \leq x < \infty$ samt $f(0) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ och t ex $f(1) > 0$ så har funktionen ett absolut maximum enligt en sats i Adams (Adams Gift). Denna återfinns i en kritisk punkt eller i en singulär punkt eller i ändpunkten $x = 0$. Då $f(0) = 0$ har $f(x)$ sitt största värde i en kritisk punkt eller i en singulär punkt.

$$f'(x) = xe^{-x}(2-x).$$

   Singulära punkter saknas här. De kritiska punkterna, där alltså $f'(x) = 0$, är $x = 0$, som också är ändpunkt, samt $x = 2$. Det största värdet ges alltså av $x = 2$ och är lika med $\dfrac{4}{e^2}$.

6. **Problemtyp:** Adams, Ch 6.1 EXAMPLE 5, EXERCISE 5

   Grafskissen stöds av

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x = 0, f(1) = 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\frac{1}{2}+\ln x), \lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty, f'(\frac{1}{\sqrt{e}}) = 0.$$

   Vi observerar särskilt att $f(x) < 0$ för $0 < x < 1$ så vi förväntar oss en negativ integral. Integralen beräknas med partiell integration.

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= (0-0) - \int_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = -\frac{4}{9}.$$

7. **Problemtyp:** Adams, Ch 2.2 EXERCISES 45, 47, 49

   Låt den sökta x-koordinaten för tangenternas tangeringspunkt P vara $x = a$. Tangeringspunktens koordinater är alltså $P = (a, \frac{1}{a^2})$. Linjen genom tangeringspunkten P och punkten $(1,1)$ har lutningen

$$\frac{\frac{1}{a^2}-1}{a-1} \qquad (1)$$

   enligt definitionen av lutning. Eftersom linjen är tangent till kurvan $y = \frac{1}{x^2}$ i P har den också lutningen

$$f'(a) = -2\frac{1}{a^3} \qquad (2)$$

   Sätter vi uttrycken i (1) och (2) lika får vi ekvationen

$$\frac{\frac{1}{a^2}-1}{a-1} = -2\frac{1}{a^3}$$

   som har rötterna $a = 1$, $a = -2$.

8. **Problemtyp:** Adams, Ch 4.3 EXAMPLE 1, CH 4.10 EXERCISES 1,5,7 EXERCISES 17, 18 Ch 1.2 EXAMPLE 11, EXERCISE 75

a) Vi försöker inte göra något smart här utan använder l'Hôpitals regel.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-x}-1)^2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(e^{-x}-1)e^{-x}(-1)}{1} = 0$$

eftersom $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x} = 1$.

b) Inte heller här gör vi några smarta observationer utan använder l'Hôpitals regel två gånger.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{-x}-1)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(e^{-x}-1)e^{-x}(-1)}{2x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(-e^{-2x}+e^{-x})}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{-2x}-2e^{-x}}{2} = 1.$$

c) Eftersom $f'(x)$ existerar i en omgivning av origo samt $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ så är alltså Taylorpolynomet $P_1(x) = x$ enligt formeln för polynomet.

d) Eftersom funktionen approximeras av Taylorpolynomet $P_1(x) = x$ nära origo kan vi approximera grafen av $f(x)$ med detta polynom i en liten omgivning av origo.

e) Eftersom $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(e^{-x}-1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-2x}-2e^{-x}+1}{x} = 0+$ är x-axeln horisontell asymptot då $x \to +\infty$.