2a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Karakteristiska ekvationen $\lambda^2 - \mathrm{Tr}\, A \cdot \lambda + \det A = 0$ är $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ och ger $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Egenrummet $E(3)$ ges av ekvationssystemet $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ och har en lösning som är $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dvs $E(3) = \mathrm{Span} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$E(-1)$ ges av $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och man finner $E(-1) = \mathrm{Span} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vi finner därmed

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

2b) A måste vara symmetrisk dvs $a = 1$. På samma sätt som i a) finner vi $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. $E(2) = \mathrm{Span} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $E(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. En ortogonal matris P har normerade och ortogonala kolonner.