6. a) $AA^{-1} = I$ A ortogonal om och endast om $A^{-1} = A^T$ dvs $AA^T = I$.

$\det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T =$
$= \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = 1$,
dvs $\det A = \pm 1$.

b) Om A är ortogonal gäller $\|Ax\| = \|x\|$ alla x.

Om $\|Ax\| = \|\lambda x\|$ dvs x är en egenvektor så måste alltså $\|\lambda x\| = \|x\|$ dvs $|\lambda| \|x\| = \|x\|$. $x \neq 0$ ger $|\lambda| = 1$, dvs $\lambda = \pm 1$.

c) Rotationen $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ saknar egenvektorer. Komplexa egenvärden $\lambda^2 + 1 = 0$.

d) Låt $k = \|x\| > 0$.

$\|Ax\| = \|A k \cdot \frac{x}{k}\| =$
$= k\|A \frac{x}{k}\| = k \|\frac{x}{k}\|$ ty $\frac{x}{k}$ är en enhetsvektor.

Alltså $\|Ax\| = k\|\frac{x}{k}\| = \|x\|$ dvs A ortogonal.