7. a) $F(1) = x^3 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 1\cdot x^3$

$F(x) = x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3$

$F(x^2) = x = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$

$F(x^3) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Matrisen är symmetrisk, dvs ortogonalt diagonaliserbar. Matrisen är också ortogonal och har alltså egenvärdena ± 1 enligt problem 6.

$E(1) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ som har

egenvektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Dessa svarar mot polynomen $1 + x^3$ och $x + x^2$ som är en bas för $E(1)$ i P_3.

$E(-1) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ger

polynomen $1 - x^3$ och $x - x^2$ som bas för $E(-1)$ i P_3.