Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson

TENTAMEN 2008-06-09
Linjär algebra II, Linjär algebra

SVAR OCH ANVISNINGAR (VERSION 1.1)

1. En bas för nollrummet är $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och en bas för värderummet är $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Klicka för lösning uppgift 1

2. För alla $a \neq -1$.

Lösning uppgift2

3. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Lösning uppgift 3

4. T ex bildar de två vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en sådan bas.

Lösning uppgift 4

5. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ är ett egenvärde av multipliciteten två och det tredje egenvärdet är $\lambda_3 = -1$ av multipliciteten ett. Eftersom matrisen är symmetrisk är den diagonaliserbar (spektralsatsen).

Beräkning uppgift 5

6. T ex är $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ en bas för egenrummet $E(0)$. Eftersom dimensionen av detta egenrum är ett, som är mindre än egenvärdets multiplicitet, finns ingen bas av egenvektorer i rummet till matrisen. Denna är alltså ej diagonaliserbar.

Lösning uppgift 6

7. Egenvärdena är $\lambda_1 = 0$ och $\lambda_2 = 1$. Tillhörande egenvektorer är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. I detta fall skulle vi dock säkert föredra en positivt orienterad ON-bas av egenvektorer. En sådan är

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Lösning uppgift 7

8. $\dfrac{5}{3}t^2$.

Lösning uppgift 8

9. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lösning uppgift 9

10. Koordinaterna är $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$.

Lösning uppgift 10

1. $n = 4$ och $m = 2$. Matrisens rang är ett som är lika med dimensionen av kolonnrummet (värderummet). En bas för kolonnrummet är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Enligt dimensionssatsen (rangsatsen) är dimensionen för nollrummet lika med $4 - 1 = 3$. En bas för nollrummet är t ex

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning problem 1

2. Matrisen för den kvadratiska formen är $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. Vi finner att den karakteristiska ekvationen är

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0.$$

   Eftersom egenvärdena är $\lambda_1 = 3$ och $\lambda_2 = 7$ finns ett ortogonalt basbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ så att den kvadratiska formen blir $Q(\mathbf{y}) = 3y_1^2 + 7y_2^2$, där y_1, y_2-axlarna blir ellipsens $Q(\mathbf{y}) = 1$ symmetriaxlar. Dessa har samma riktningar i x_1x_2-systemet som egenvektorerna hörande till matrisens egenvärden. Om vi väljer dessa riktningar som en positivt orienterad ON-bas finner vi riktningarna $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ samt $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ hörande till egenvärdena $\lambda_1 = 3$ respektive $\lambda_2 = 7$.

Lösning problem 2

EXTRA UPPGIFT

$$y_1 = -c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} \text{ och } y_2 = 2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x}.$$

Lösning extra uppgift