Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson

1MA 024 LINJÄR ALGEBRA II
1MA 109 LINJÄR ALGEBRA MN1
1MA 722 LINJÄR ALGEBRA
2008-08-26

Tentamen består av 10 UPPGIFTER (max 3 poäng per uppgift), 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) samt en EXTRA UPPGIFT (max 2 poäng). Denna är en tillämpning som kan lösas med bifogad information oberoende av kurs. Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.
18-24 poäng ger betyg 3, 25-31 poäng ger betyg 4 och 32-42 poäng ger betyg 5.
Skrivtid: 8-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet och en bas för värderummet av A.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm de värden på a för vilka värderummet av T innehåller vektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Motivera noggrant.

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling med avseende på x_1-axeln följt av en moturs rotation omkring origo vinkeln $\pi/2 = 90°$. Bestäm standardmatrisen av T.

4. Finn en bas för mängden av alla vektorer i $\mathbf{R}^3$ som tillhör planet $x - 2y - 3z = 0$.

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm samtliga egenvärden till A samt deras multiplicitet. Avgör också om A är diagonaliserbar.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 0 av multipliciteten två. Bestäm en bas av egenvektorer för egenrummet hörande till egenvärdet 0. Avgör också om A är diagonaliserbar.

V.G.V!

7. Låt $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som ortogonal projektion på x_1x_2-planet, dvs på planet $x_3 = 0$. Bestäm avbildningens egenvärden samt en *ortogonal* bas av egenvektorer för avbildningen.

8. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten
$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$
Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p(t) = 1$, dvs låt $W = \text{Span}\{1\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = t^2$ på W med avseende på den inre produkten (1).

9. Grafen av ekvationen
$$x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2 = 1$$
är en ellips. Bestäm största avståndet till origo från en punkt på ellipsen.

10. $\mathbf{P}_n\,, n = 0, 1, 2, \ldots$ är rummet av polynom av grad högst n inklusive nollpolynomet. $\mathcal{B} = \{\, 1 + 2t + t^2,\, 1 - 2t + t^2\}$ är bas för ett delrum W av $\mathbf{P}_2$. Bestäm de värden på a för vilka polynomet $1 + 2at + t^2$ tillhör delrummet W.

PROBLEM

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ definierar en avbildning (transformation) $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm n och m, rangen av matrisen A, en bas för kolonnrummet Col A samt en bas för nollrummet Nul A.

2. Grafen av ekvationen $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en hyperbel. Bestäm riktningarna i x_1x_2-systemet för hyperbelns principalaxlar, dvs för dess symmetriaxlar.

EXTRA UPPGIFT

Lös systemet av differentialekvationer $\left\{\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & y_1 & + & 4y_2 \\ y_2' & = & 2y_1 & + & 3y_2 \end{array}\right.$ med hjälp av följande information.

$y' = ay$ har lösningen $y = ce^{ax}$. Systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ löses genom att utföra substitutionerna $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ och $\mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$ i det ursprungliga systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Vi får då $P\mathbf{u}' = A(P\mathbf{u})$ dvs $\mathbf{u}' = (P^{-1}AP)\mathbf{u}$ eller $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$. Om matrisen P diagonaliserar A får vi ett diagonalt system $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$ som vi kan lösa. De sökta lösningarna fås slutligen som $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$.

I vårt fall är $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.