Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T. Erlandsson

TENTAMEN 2008-08-26
Linjär algebra II, Linjär algebra

SVAR OCH ANVISNINGAR (VERSION 1.1)

1. En bas för nollrummet är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och en bas för värderummet är t ex $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. För alla a. Eftersom värderummet $V(T)$ innehåller vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ innehåller $V(T)$ också alla multiplar $c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$. Speciellt innehåller alltså $V(T)$ vektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ oberoende av a.

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. T ex bildar de två vektorerna $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en sådan bas.

5. Eftersom matrisen är triangulär är egenvärdena lika med elementen på diagonalen, dvs $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 2$ vilka alla är av multipliciteten ett. Då dessa tre egenvärden är olika är matrisen diagonaliserbar.

6. T ex är
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
en bas för egenrummet $E(0)$. Det tredje egenvärdet är $\lambda = 1$ som är av multipliciteten ett. Eftersom dimensionen av egenrummet $E(1)$ är ett och dimensionen av egenrummet $E(0)$ är två finns en bas av egenvektorer i rummet till matrisen. Denna är alltså diagonaliserbar.

7. Egenvärdena är $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 0$. Ett naturligt val av egenvektorer är
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
hörande till egenvärdet 1 samt $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ hörande till egenvärdet 0. Dessa vektorer är en ortogonal bas av egenvektorer.

8. $\dfrac{1}{3}$.

9. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

10. För alla a. Delrummet W innehåller vektorn $1+t^2$ samt vektorn t. Därför innehåller W alla vektorer av formen $1+t^2+2at$.

1. $n=4$ och $m=2$. Matrisens rang är två som är lika med dimensionen av kolonnrummet (värderummet). En bas för kolonnrummet är t ex

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enligt dimensionssatsen (rangsatsen) är dimensionen för nollrummet lika med $4-2=2$. En bas för nollrummet är t ex

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Matrisen för den kvadratiska formen är $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Vi finner att den karakteristiska ekvationen är

$$\lambda^2-2\lambda-3=0.$$

Eftersom egenvärdena är $\lambda_1=3$ och $\lambda_2=-1$ finns ett ortogonalt basbyte $\mathbf{x}=P\mathbf{y}$ så att den kvadratiska formen blir $Q(\mathbf{y})=3y_1^2-y_2^2$, där y_1, y_2-axlarna blir hyperbelns $Q(\mathbf{y})=1$ symmetriaxlar. Dessa har samma riktningar i x_1x_2-systemet som egenvektorerna hörande till matrisens egenvärden. Om vi väljer dessa riktningar som en positivt orienterad ON-bas finner vi riktningarna $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ samt $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ hörande till egenvärdena $\lambda_1=3$ respektive $\lambda_2=-1$.

EXTRA UPPGIFT

$$y_1=c_1e^{5x}-2c_2e^{-x} \text{ och } y_2=c_1e^{5x}+c_2e^{-x}.$$