Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Erlandsson, Chapovalova, Fogelklou

TENTAMEN 2009-03-13
Linjär algebra II **IT2, STS2**
Linjär algebra MN1

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. En bas för nollrummet består av t ex de två vektorerna $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   En bas för värderummet är t ex $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. För alla a. Eftersom värderummet $V(T)$ innehåller vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ innehåller $V(T)$ också alla multiplar $c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c \in \mathbf{R}$. Speciellt innehåller alltså $V(T)$ vektorn $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ oberoende av a.

3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

4. T ex bildar de två vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en sådan bas eftersom planets vektorer är av formen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Eftersom matrisen är triangulär är egenvärdena lika med elementen på diagonalen, dvs $\lambda_0 = 1$ och $\lambda_1 = 2$ vilka båda är av multipliciteten ett. Då dessa två egenvärden är olika är matrisen diagonaliserbar.

6. En bas för egenrummet $E(1) = \text{Nul}\,(A - 1 \cdot I)$ är t ex

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Eftersom dimensionen av egenrummet $E(1)$ är två och dimensionen av egenrummet $E(3)$ är ett, och egenvektorer hörande till olika egenvärden är linjärt oberoende, finns en bas av egenvektorer i $\mathbf{R}^3$ till matrisen. Denna är alltså diagonaliserbar.

7. Man kan söka standardmatrisen av avbildningen och läsa av egenvärdena med sin multiplicitet direkt från denna eftersom den är diagonal. Följande resonemang är mer geometriskt. Vid speglingen är varje vektor i x_1x_2-planet oförändrad och varje vektor $\mathbf{u}$ ortogonal mot planet speglas till $(-1)\mathbf{u}$. Alltså är x_1x_2-planet egenrum av dimension två hörande till egenvärdet 1 som då måste ha multiplicitet större än eller lika med två och det tredje egenvärdet är -1, vars motsvarande egenrum är x_3-axeln, och har därför multipliciteten större än eller lika med ett. Eftersom summan av multipliciteterna är tre har egenvärdet 1 multipliciteten två och egenvärdet -1 multipliciteten ett.

8. Den kvadratiska formens matris är $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ som har egenvärdena $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ och $\lambda_2 = \frac{5}{4}$. Det finns alltså en ON-bas i vilken ellipsen har ekvationen $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1$. Ellipsens halvaxlar är därför $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ respektive $b = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ellipsens area blir därför $\pi \frac{4}{\sqrt{15}}$.

9. $\frac{5}{3}t^2$.

10. Koordinaterna är de tal c_1 och c_2 sådana att $c_1(1+2t+t^2)+c_2(1-2t+t^2) = 1+2at+t^2$. Detta leder till ett ekvationssystem med lösningen

$$c_1 = \frac{1+a}{2}, \quad c_2 = \frac{1-a}{2}$$

för alla a.

Lösning med basbyte Eftersom $4t = 1(1+2t+t^2)+(-1)(1-2t+t^2)$ och $2(1+t^2) = 1(1+2t+t^2)+1(1-2t+t^2)$ kan vi välja $4t$ och $2(1+t^2)$ som ny bas med basbytesmatrisen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

I den nya basen har $2at+1+t^2$ koordinaterna $\begin{bmatrix} a/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. Koordinaterna för polynomet med avseende på den gamla basen är därför

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+a)/2 \\ (1-a)/2 \end{bmatrix}.$$

1. $n = 4$ och $m = 2$. Matrisens rang är ett som är lika med dimensionen av kolonnrummet (värderummet). En bas för kolonnrummet är t ex

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enligt dimensionssatsen (rangsatsen) är dimensionen för nollrummet lika med $4-1=3$. En bas för nollrummet är t ex

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Matrisen för den kvadratiska formen är $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Eftersom egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ finns ett ortogonalt basbyte $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ så att den kvadratiska formen blir $Q(\mathbf{y}) = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$, där $y_1 = 0$ blir hyperboloidens symmetriplan. Detta svarar mot egenrummet $E(-1) = \text{Nul}\,(A + 1 \cdot I)$ och har alltså ekvationen

$$x + y + z = 0$$

i xyz-systemet. Avståndet mellan hyperboloidens båda delar blir avståndet mellan hyperboloidens skärningspunkter med y_1-axeln, dvs $2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

EXTRA UPPGIFT

$$y_1 = 2c_1e^{3x} - c_2e^{-2x} \text{ och } y_2 = c_1e^{3x} + 2c_2e^{-2x}.$$