Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

LINJÄR ALGEBRA II
2009-06-08

Tentamen består av 10 UPPGIFTER (max 3 poäng per uppgift), 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) samt en EXTRA UPPGIFT (max 2 poäng). Denna är en tillämpning som kan lösas med bifogad information oberoende av kurs. Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.
18-24 poäng ger betyg 3, 25-31 poäng ger betyg 4 och 32-42 poäng ger betyg 5.
Skrivtid: 08-13 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet och en bas för kolonnrummet av A.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm de värden på a för vilka värderummet av T innehåller vektorn $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Motivera noggrant.

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en spegling med avseende på linjen $x_1 = x_2$ följt av en moturs rotation omkring origo vinkeln $\pi/4 = 45°$. Bestäm standardmatrisen av T.

4. Finn en bas för mängden av alla vektorer i $\mathbf{R}^4$ som tillhör delrummet
$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0.$$

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm samtliga egenvärden till A samt deras multiplicitet. Avgör också om A är diagonaliserbar.

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 1 av multipliciteten två. Bestäm en bas av egenvektorer för egenrummet hörande till egenvärdet 1. Avgör också om A är diagonaliserbar.

7. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras som ortogonal projektion på linjen $x_1 = x_2$. Bestäm avbildningens egenvärden samt en *ortogonal* bas av egenvektorer för avbildningen.

8. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av $p_0(t) = 1$ och $p_1(t) = t$, dvs låt $W = \text{Span}\{1, t\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $p_2(t) = t^2$ på W med avseende på den inre produkten (1).

9. Grafen av ekvationen

$$x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2 = 1$$

är en hyperbel. Denna skär en av sina symmetriaxlar i två punkter. Bestäm avståndet mellan dessa punkter.

10. $\mathbf{P}_n\,, n = 0, 1, 2, \ldots$ är rummet av polynom av grad högst n inklusive nollpolynomet. $\mathcal{B} = \{\,(1+t)^2,\,(1-t)^2\}$ är bas för ett delrum W av $\mathbf{P}_2$. Avgör om polynomet $(1+t)(1-t)$ tillhör delrummet W.

PROBLEM

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ definierar en avbildning (transformation) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm n och m, rangen av matrisen A, en bas för kolonnrummet Col A samt en bas för nollrummet Nul A.

2. Grafen av ekvationen $x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en ellips. Bestäm riktningarna i x_1x_2-systemet för ellipsens principalaxlar, dvs för dess symmetriaxlar.

EXTRA UPPGIFT

Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \end{cases}$ med hjälp av följande information.

$y' = ay$ har lösningen $y = ce^{ax}$. Systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ löses genom att utföra substitutionerna $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ och $\mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$ i det ursprungliga systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Vi får då $P\mathbf{u}' = A(P\mathbf{u})$ dvs $\mathbf{u}' = (P^{-1}AP)\mathbf{u}$ eller $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$. Om matrisen P diagonaliserar A får vi ett diagonalt system $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$ som vi kan lösa. De sökta lösningarna fås slutligen som $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$.

I vårt fall är $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.