Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
T Erlandsson

TENTAMEN 2009-06-08
Linjär algebra II

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. En bas för nollrummet består av t ex de två vektorerna $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   En bas för värderummet är t ex $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. För alla a. Eftersom $\det A = 1+a^2 \neq 0$ för alla a är matrisen A invertibel och ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig lösning för alla $\mathbf{b}$.

3. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

4. T ex bildar de tre vektorerna $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ en sådan bas eftersom planets vektorer är av formen

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Eftersom matrisen är triangulär är egenvärdena lika med elementen på diagonalen, dvs $\lambda_0 = 0$ och $\lambda_1 = 1$ vilka båda är av multipliciteten ett. Då dessa två egenvärden är olika är matrisen diagonaliserbar.

6. Matrisen har egenvärdena 0 och 1 av multipliciteten ett respektive två. En bas för egenrummet $E(1) = \mathrm{Nul}\,(A - 1 \cdot I)$ är t ex

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Eftersom dimensionen av egenrummet $E(1)$ är ett och dimensionen av egenrummet $E(0)$ också är ett finns alltså inte en bas av egenvektorer i $\mathbf{R}^3$ till matrisen. Denna är alltså inte diagonaliserbar.

7. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger på linjen och avbildas på sig själv under ortogonal projektion på linjen. Vektorn $\mathbf{u}$ är alltså egenvektor med egenvärdet 1. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är ortogonal mot linjen och avbildas på nollvektorn $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$ under ortogonal projektion på linjen. Vektorn $\mathbf{v}$ är alltså egenvektor med egenvärdet 0.

8. $\frac{1}{3}$.

9. Den kvadratiska formens matris är $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ som har egenvärdena $\lambda_1 = 5$ och $\lambda_2 = -3$. Det finns alltså en ON-bas i vilken hyperbeln har ekvationen $5y_1^2 - 3y_2^2 = 1$. Hyperbeln skär alltså y_1-axeln i punkterna $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Avståndet mellan dessa punkter är $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

10. Vi söker tal c_1 och c_2, ej båda lika med noll, sådana att $c_1(1+t)^2+c_2(1-t)^2 = (1+t)(1-t)$. Detta är en identitet, dvs likheten ska gälla för alla t. Sätter vi $t = 1$ följer att $c_1 = 0$ och sätter vi $t = -1$ följer att $c_2 = 0$. Det finns alltså ingen sådan likhet. Därför tillhör $(1+t)(1-t)$ inte W.

1. $n = 4$ och $m = 2$. Matrisens rang är ett som är lika med dimensionen av kolonnrummet (värderummet). En bas för kolonnrummet är t ex

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enligt dimensionssatsen (rangsatsen) är dimensionen för nollrummet lika med $4 - 1 = 3$. En bas för nollrummet är t ex

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Matrisen för den kvadratiska formen är $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$. Egenvärdena är $\lambda_1 = \frac{5}{4}$ och $\lambda_2 = \frac{3}{4}$. Symmetriaxlarna är parallella med motsvarande egenrum. En bas för $E(\frac{5}{4})$ är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och en bas för $E(\frac{3}{4})$ är $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

EXTRA UPPGIFT

$$y_1 = c_1e^{3x} - c_2e^{-x} \text{ och } y_2 = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}.$$