Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Ernst Dieterich, Thomas Erlandsson

2013-06-10
LINJÄR ALGEBRA II
LINJÄR ALGEBRA 1MA722

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.

1. (a) Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras som moturs rotation omkring origo med vinkeln $\frac{3\pi}{4} = 135°$. Bestäm T :s matris i standardbasen.

   (b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm de värden på a för vilka värderummet av T innehåller vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ samt bestäm för dessa a de vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ som av T avbildas på vektorn $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$.

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris P så att $A = PDP^{-1}$.

   (b) Ange de värden på a för vilka $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ är ortogonalt diagonaliserbar och bestäm en ortogonal bas av egenvektorer för varje sådant värde på a.

3. $\mathcal{P}_n$ är rummet av polynom av grad högst n.

   (a) U är det delrum av $\mathcal{P}_2$ vars polynom uppfyller $p(0) = p(1) = 0$. Bestäm en bas i delrummet U.

   (b) För p och q i $\mathcal{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

   $$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{1}$$

   Låt W vara det delrum av $\mathcal{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = 1$, dvs låt $W = \text{Span}\{p_1\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet p på W med avseende på den inre produkten (1) där $p(t) = t + t^2$.

4. (a) Bevisa att $2ax_1x_2 = 1$ är en hyperbel för alla $a \neq 0$.

   (b) Hyperbeln $2x_1x_2 = 1$ skär en av sina symmetriaxlar i två punkter. Bestäm avståndet mellan dessa.

V.G.V!

5. Ett inre produktrum är ett reellt vektorrum med en inre produkt, dvs en avbildning som tillordnar varje par av vektorer (v, w) ett reellt tal $\langle v, w\rangle$ så att fyra axiom är uppfyllda.

   (a) Återge dessa fyra axiom.

   (b) Hur definieras vinkeln α mellan två vektorer v och w i ett inre produktrum?

   (c) Vektorerna v och w i ett inre produktrum uppfyller $\|v\| = 1$, $\|w\| = 2$ samt $\|v + w\| = \sqrt{7}$. Finn $\langle v, w\rangle$ samt vinkeln α mellan v och w.

6. Ytan Y består av alla punkter (x, y, z) i $\mathbf{E}^3$ som uppfyller ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1.$$

   Beskriv Y geometriskt. Bestäm Y:s minsta avstånd från origo samt ange de punkter på Y som ligger närmast origo. (Punkternas koordinater ska anges i standardbasen).

7. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ ges av $F(p) = p + p' + p'' + p'''$.

   (a) Ange F:s matris i standardbasen.

   (b) Visa att operatorn F är inverterbar.

   (c) Ange F^{-1}:s matris i standardbasen.

   (d) Givet ett allmänt polynom $q = b_0 1 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3$ i $\mathcal{P}_3$, finn polynomet $p \in \mathcal{P}_3$ så att $p + p' + p'' + p''' = q$.

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases}$$

De som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Beräkna A^n för alla naturliga tal n, då $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

LYCKA TILL!