

Lösningar 2013-06-10

$$1. (a) [T] = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{3\pi}{4} & -\sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{4} & \cos \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

$$(b) V(T) = K(A) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2 \ni y \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$T(x) = y \Leftrightarrow Ax = y \Leftrightarrow x = A^{-1}y = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svar (b). För alla $a \in \mathbb{R}$ gäller att $y \in V(T)$, och $x = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \end{pmatrix}$ är den enda lösningen till ekvationen $T(x) = y$.

$$2. (a) 0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda+2)$$

löses av $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$.

$$E(4) = N(4I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$4I - A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 = 2x_2; \quad \text{sätt } x_2 = t.$$

$$E(-2) = N(-2I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$-2I - A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 = -x_2; \quad \text{sätt } x_2 = t.$$

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(4) \\ b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(-2) \end{array} \right\} \Rightarrow P = (b_1 | b_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix} \text{ löser} \\ P^{-1}AP = D, \text{ och därmed även } A = PDP^{-1}.$$

Svar (a). $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 4 & \\ & -2 \end{pmatrix}$, ex. vis.

(b) A är symmetrisk $\forall a \in \mathbb{R}$. Enligt Spektralsatsen är därmed A ortogonalt diagonaliserbar $\forall a \in \mathbb{R}$.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -a \\ -a & \lambda - a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2a & \lambda - 2a \\ -a & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 2a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -a & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - 2a) \lambda$$

löses av $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2a$.

Om $a = 0$, då är $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ det enda egenvärdet till $A = 0$, och $E(0) = \mathbb{E}^2$. Alltså är varje ortogonal bas i \mathbb{E}^2 en ortogonal bas av egenvektorer till A .

Antag nu att $a \neq 0$.

$$E(0) = N(0I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -a & -a \\ -a & -a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad x_1 = -x_2; \quad \text{sätt } x_2 = t.$$

$$E(2a) = \dots = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(0)$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(2a)$$

$$b_1 \perp b_2$$

$\Rightarrow b_1, b_2$ är en ortogonal bas av egenvektorer till A .

Svar (b). För alla $a \in \mathbb{R}$ är A ortogonalt diagonaliserbar.

För alla $a \in \mathbb{R}$ är $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en ortogonal bas av egenvektorer till A , ex. vis.

3. (a) För varje $p = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathcal{P}_2$ gäller att

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{U} &\Leftrightarrow p(0) = p(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a_0 = 0 \text{ och } a_1 = -a_2 \\ &\Leftrightarrow p = a_1 (X - X^2) \\ &\Leftrightarrow p \in \text{span}\{X - X^2\} \end{aligned}$$

Alltså är $\mathcal{U} = \text{span}\{X - X^2\}$. Dessutom är $X - X^2 \neq 0$, alltså linjärt oberoende.

Svar (a). $X - X^2$ är en bas i \mathcal{U} , ex. vis.

(b) $W = \text{span}\{1\}$ har dimension 1. Alltså är $b = \frac{1}{\|1\|}$ en on-bas i W , och

$$\text{proj}_W(p) = \langle p, b \rangle b = \langle X + X^2, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \langle X + X^2, 1 \rangle 1 = \frac{2}{3} 1,$$

$$\text{då } \|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = 1(-1)1(-1) + 1(0)1(0) + 1(1)1(1) = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow \|1\| = \sqrt{3}$$

$$\text{och } \langle X + X^2, 1 \rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2.$$

Svar (b). $\text{proj}_W(X + X^2) = \frac{2}{3} 1$.

4. (a) Kurvan $K: 2ax_1x_2 = 1$ är en hyperbel omh vänsterledets kvadratiske form

$$q(x) = 2ax_1x_2 = x^T A x, \text{ med } A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

har signaturen $\text{sign}(q) = (1, -1)$, dvs. omh A har ett positivt och ett negativt egenvärde.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & \\ -a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = (\lambda + a)(\lambda - a) \text{ löses av } \lambda_1 = a, \lambda_2 = -a.$$

Om $a \neq 0$, då har a och $-a$ olika tecken, dvs ett av egenvärdena λ_1, λ_2 är positivt och det andra är negativt.

Svar (a). För alla $a \neq 0$ har $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ett positivt och ett negativt egenvärde. Alltså är K en hyperbel för alla $a \neq 0$.

(b) För $a=1$ är $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Om b_1, b_2 är normerade vektorer i $E(1), E(-1)$, då gäller

$$q(x) = 2x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2 \quad \forall x = y_1b_1 + y_2b_2 \in \mathbb{F}^2.$$

Hyperbeln $K: 2x_1x_2 = 1$ skär y_1 -axeln i punkterna $(y_1, y_2) = (\pm 1, 0)$.

Svar (b). Avståndet mellan skärningspunkterna är $d((1,0), (-1,0)) = 2$.

$$5. (a) \quad (IP1) \quad \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

$$(IP2) \quad \langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$(IP3) \quad \langle cv, w \rangle = c \langle v, w \rangle$$

$$(IP4) \quad \langle v, v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$$

$$(b) \quad \alpha := \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right) & \text{om } v \neq 0 \text{ och } w \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } v = 0 \text{ eller } w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle \\
 &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\
 &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2
 \end{aligned}$$

medför att

$$\begin{aligned}
 \langle v, w \rangle &= \frac{1}{2} (\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) \\
 &= \frac{1}{2} (7 - 1 - 4) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1
 \end{aligned}$$

samt

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{1}{2}, \quad \text{alltså } \alpha = 60^\circ.$$

Svar (c). $\langle v, w \rangle = 1$, $\alpha = 60^\circ$.

6. Skriv $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ istället för $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Vänsterledet i Y 's ekvation blir då

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = x^T A x, \quad \text{då } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A 's egenvärden är lösningarna till

$$\begin{aligned}
 0 &= \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3) \lambda^2, \quad \text{alltså } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Från multipliciteterna läser vi av att $\dim E(3) = 1$ och $\dim E(0) = 2$. Alltså finns det en on-bas $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i \mathbb{F}^3 så att $b_1 \in E(3)$ och $b_2, b_3 \in E(0)$. Därmed gäller

$$q(x) = 3y_1^2 + 0y_2^2 + 0y_3^2 = 3y_1^2 \quad \forall x = y_1 b_1 + y_2 b_2 + y_3 b_3 \in \mathbb{F}^3.$$

Detta innebär vidare $\forall x \in \mathbb{F}^3$ att

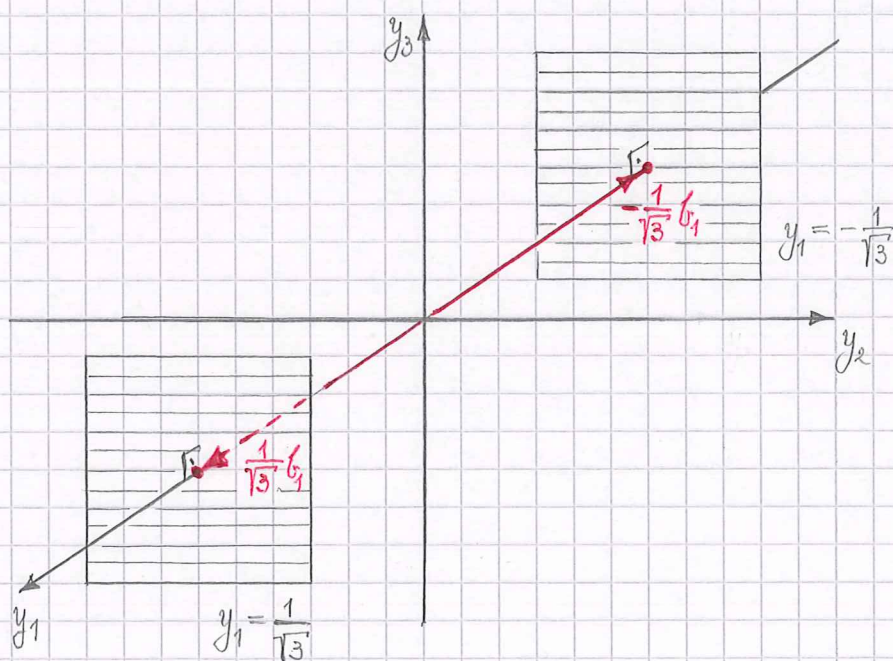
$$x \in Y \Leftrightarrow q(x) = 1 \Leftrightarrow 3y_1^2 = 1 \Leftrightarrow y_1^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

F basen \underline{b} beskriver $y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ två parallella plan, med gemensam normalvektor b_1 , genom punkterna $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} b_1$. Ytans minsta avstånd från origo är därmed $\frac{1}{\sqrt{3}}$, och detta

antas i punkterna $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} b_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, eftersom $b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Svar. Y består av två parallella plan. Y 's minsta avstånd från origo är $\frac{1}{\sqrt{3}}$, och detta

antas i punkterna $\pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Y$.



7. (a) Standardbasen i \mathcal{P}_3 är $\underline{X} = (1, X, X^2, X^3)$. F 's matris i standardbasen är

$$A = [F]_{\underline{X}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [F(1)]_{\underline{X}} & \dots & [F(X^2)]_{\underline{X}} & \\ \hline \hline \hline \hline \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 2 & 6 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ d\aa}$$

$$F(1) = 1 + 1' + 1'' + 1''' = 1,$$

$$F(X) = X + X' + X'' + X''' = X + 1,$$

$$F(X^2) = X^2 + (X^2)' + (X^2)'' + (X^2)''' = X^2 + 2X + 2 \cdot 1,$$

$$F(X^3) = X^3 + (X^3)' + (X^3)'' + (X^3)''' = X^3 + 3X^2 + 6X + 6 \cdot 1.$$

(b) $\det(A) = 1 \Rightarrow A$ är invertierbar $\Rightarrow F$ är invertierbar.

(c) $[F^{-1}]_{\underline{X}} = [F]_{\underline{X}}^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ & 1 & 2 & 6 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$

(d) Givet $q = \sum_{i=0}^3 b_i X^i \in \mathcal{P}_3$, s\aa s\oöker vi $p = \sum_{i=0}^3 a_i X^i \in \mathcal{P}_3$ s\aa att $F(p) = q$.

Nu g\aaller $F(p) = q \Leftrightarrow p = F^{-1}(q)$

$$\Leftrightarrow [p] = [F^{-1}(q)] = [F^{-1}][q] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -2 & 0 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 - b_1 \\ b_1 - 2b_2 \\ b_2 - 3b_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow p = (b_0 - b_1)1 + (b_1 - 2b_2)X + (b_2 - 3b_3)X^2 + b_3X^3.$$

8. Systemet kan skrivas som matrisekvation $y' = Ay$, då $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonaliseringsproblemet $S^{-1}AS = D$ löses av $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 5 & \end{pmatrix}$, ex. vis.

Det diagonala systemet $z' = Dz$ löses av $\begin{cases} z_1 = c_1 e^{-2x} \\ z_2 = c_2 e^{5x} \end{cases}$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

Det givna systemet $y' = Ay$ har då den allmänna lösningen

$$y = Sz = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + 4z_2 \\ -z_1 + 3z_2 \end{pmatrix}, \text{ då } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ som ovan.}$$

Svar.
$$\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-2x} + 4c_2 e^{5x} \\ y_2 = -c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{5x} \end{cases}, \text{ med } (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

8'. Med $S = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 5 & \end{pmatrix}$ gäller $S^{-1}AS = D$. Detta medför $\forall n \in \mathbb{N}$ att

$$\begin{aligned} A^n &= (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} (-2)^n & 4 \cdot 5^n \\ -(-2)^n & 3 \cdot 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3(-2)^n + 4 \cdot 5^n & (-4)(-2)^n + 4 \cdot 5^n \\ (-3)(-2)^n + 3 \cdot 5^n & 4(-2)^n + 3 \cdot 5^n \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 5^n & (-1)^{n+1} 2^{n+2} + 4 \cdot 5^n \\ (-1)^{n+1} \cdot 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 5^n & (-1)^n 2^{n+2} + 3 \cdot 5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$