Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Thomas Erlandsson

2016-10-18
LINJÄR ALGEBRA II
LINJÄR ALGEBRA 1MA722

Tentamen består av 8 problem (max 5 poäng per problem) till vilka fordras *fullständiga lösningar.* 18 - 24 poäng ger betyget 3, 25 - 31 betyget 4, 32 - 40 betyget 5.
Skrivtid: 08.00-13.00 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

1. (a) Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras som moturs rotation omkring origo med vinkeln $\frac{\pi}{2} = 90°$ åtföljt av en spegling med avseende på linjen $x_2 = 0$. Bestäm T :s matris i standardbasen.

   (b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm de värden på a för vilka värderummet av T innehåller vektorn $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$ samt bestäm för dessa a de vektorer $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ som av T avbildas på vektorn $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$.

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris P så att $A = PDP^{-1}$.

   (b) För vilka värden på a är $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonalt diagonaliserbar? Bestäm för dessa a en diagonalmatris D och en ortogonal matris P så att $A = PDP^T$.

3. $\mathcal{P}_n$ är rummet av polynom av grad högst n.

   (a) U är det delrum av $\mathcal{P}_2$ vars polynom uppfyller $p(1) = p(-1) = 0$. Bestäm en bas i delrummet U.

   (b) För p och q i $\mathcal{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

   $$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{1}$$

   Låt W vara det delrum av $\mathcal{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = t^2$, dvs låt $W = \text{Span}\{p_1\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet p på W med avseende på den inre produkten (1) där $p(t) = 1 + t$.

4. (a) Bevisa att $3x_1^2 + 2ax_1x_2 - 3x_2^2 = 1$ är en hyperbel för alla värden på a.

   (b) Hyperbeln $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 = 1$ skär en av sina symmetriaxlar i två punkter. Bestäm avståndet mellan dessa.

V.G.V!

5. Ett inre produktrum är ett reellt vektorrum med en inre produkt, dvs en avbildning som tillordnar varje par av vektorer (v, w) ett reellt tal $\langle v, w\rangle$ så att fyra axiom är uppfyllda.

(a) Återge dessa fyra axiom.

(b) Hur definieras normen $\|u\|$ av en vektor u i ett inre produktrum?

(c) Hur definieras vinkeln α mellan två vektorer u och v i ett inre produktrum?

(d) Vektorerna u och v i ett inre produktrum uppfyller $\|u\| = 3$, $\|v\| = 4$ samt $\|u+v\| = 5$. Bestäm vinkeln α mellan u och v.

6. En kvadratisk matris A säges vara ortogonal om $A^{-1} = A^T$. Speciellt är A ortogonal om och endast om A svarar mot en isometrisk avbildning, dvs om och endast om $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

(a) Bevisa att om A är ortogonal så är $\det A = \pm 1$.

(b) Bevisa att om en ortogonal matris har en egenvektor så är motsvarande egenvärde $+1$ eller -1.

(c) Ge exempel på en 2×2 ortogonal matris A som saknar egenvektorer. Motivera.

(d) Bevisa att om A är en kvadratisk matris sådan att $\|A\mathbf{u}\| = 1$ för alla enhetsvektorer $\mathbf{u}$ så är A ortogonal.

7. Den linjära operatorn $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ ges av

$$F(c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3) = c_0\,x^3 + c_1\,x^2 + c_2\,x + c_3.$$

(a) Ange F:s matris i standardbasen $\{1, x, x^2, x^3\}$.

(b) Undersök om operatorn har egenpolynom $p(x)$, dvs om det finns polynom skilda från noll-polynomet samt något tal $k \in \mathbf{R}$ så att

$$F(p(x)) = kp(x).$$

Bestäm i så fall en bas av egenpolynom i varje egenrum $E(k)$.

8. (a) Motivera varför $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ har egenskapen att nollrummet Nul A är lika med kolonnrummet Col A.

(b) Bevisa att om den kvadratiska $n \times n$ matrisen A har egenskapen att Nul A= Col A så måste n vara ett jämnt tal $2m$.

(c) Ange en 4×4 matris A sådan att Nul $A =$ Col A.

(d) Är det möjligt att en matris A som uppfyller Nul A= Col A skulle kunna vara diagonaliserbar? Motivera.

LYCKA TILL!