Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Erlandsson, Chapovalova, Fogelklou

LINJÄR ALGEBRA II **IT2, STS2**
LINJÄR ALGEBRA MN1
2009-03-13

Tentamen består av 10 UPPGIFTER (max 3 poäng per uppgift), 2 PROBLEM (max 5 poäng per problem) samt en EXTRA UPPGIFT (max 2 poäng). Denna är en tillämpning som kan lösas med bifogad information oberoende av kurs. Till både uppgifterna och problemen fordras fullständiga lösningar.
18-24 poäng ger betyg 3, 25-31 poäng ger betyg 4 och 32-42 poäng ger betyg 5.
Skrivtid: 14-19 **Tillåtna hjälpmedel:** Skrivdon.

UPPGIFTER

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en bas för nollrummet respektive kolonnrummet av A.

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ och definiera $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm de värden på a för vilka värderummet av T innehåller vektorn $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras av en moturs rotation omkring origo vinkeln $\pi/2 = 90^\circ$ följt av en spegling med avseende på x_1-axeln. Bestäm standardmatrisen av T.

4. Finn en bas för mängden av alla vektorer i $\mathbf{R}^3$ som tillhör planet $x = z$.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Motivera varför A är diagonaliserbar.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ har egenvärdet 1 av multipliciteten två samt egenvärdet 3. Bestäm en bas av egenvektorer för egenrummet hörande till egenvärdet 1. Avgör slutligen om A är diagonaliserbar.

7. Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som spegling med avseende på x_1x_2-planet, dvs med avseende på planet $x_3 = 0$. Bestäm avbildningens egenvärden med multiplicitet.

8. Arean av ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$ är enligt en känd formel πab. Bestäm arean av ellipsen $x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2 = 1$.

V.G.V!

9. $\mathbf{P}_2$ är rummet av polynom av grad högst två inklusive nollpolynomet. För p och q i $\mathbf{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

Låt W vara det delrum av $\mathbf{P}_2$ som genereras av de ortogonala polynomen $p_1(t) = t$ och $p_2 = t^2$, dvs låt $W = \text{Span}\{t, t^2\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = 1$ på W med avseende på den inre produkten (1).

10. $\mathbf{P}_n\,, n = 0, 1, 2, \ldots$ är rummet av polynom av grad högst n inklusive nollpolynomet. $\mathcal{B} = \{\,1+2t+t^2,\ 1-2t+t^2\}$ är bas för ett delrum W av $\mathbf{P}_2$. Bestäm koordinaterna av polynomet $p(t) = 1 + 2at + t^2$ med avseende på basen $\mathcal{B}$ för de värden på a för vilka $p(t) \in W$.

PROBLEM

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ definierar en avbildning (transformation) $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm n och m, rangen av matrisen A, en bas för kolonnrummet Col A samt en bas för nollrummet Nul A.

2. Grafen av ekvationen $x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ är en tvåmantlad hyperboloid vars symmetriplan är $x = 0$.

$$2xy + 2xz + 2yz = 1$$

definierar också en tvåmantlad hyperboloid. Bestäm ekvationen för dess symmetriplan i xyz-systemet samt avståndet mellan hyperboloidens båda delar. Den kvadratiska formens matris har egenvärdet -1 av multiplicitet två samt egenvärdet 2.

EXTRA UPPGIFT

Lös systemet av differentialekvationer $\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 \end{cases}$ med hjälp av följande information.

$y' = ay$ har lösningen $y = ce^{ax}$. Systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ löses genom att utföra substitutionerna $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ och $\mathbf{y}' = P\mathbf{u}'$ i det ursprungliga systemet $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Vi får då $P\mathbf{u}' = A(P\mathbf{u})$ dvs $\mathbf{u}' = (P^{-1}AP)\mathbf{u}$ eller $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$. Om matrisen P diagonaliserar A får vi ett diagonalt system $\mathbf{u}' = D\mathbf{u}$ som vi kan lösa. De sökta lösningarna fås slutligen som $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$.

I vårt fall är $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.