Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Ernst Dieterich, Thomas Erlandsson

2012-03-07
LINJÄR ALGEBRA II
LINJÄR ALGEBRA 1MA722

Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som inte går något av programmen F, W, MaKand och är godkänd på duggan får hoppa över den första uppgiften.

1. (a) Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras som spegling med avseende på linjen $x_1 = x_2$. Bestäm T :s matris i standardbasen.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ definierar en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm dimensionen av nollrummet Nul A samt ange en bas i Nul A.

2. (a) För vilka värden på konstanten a är $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ ortogonalt diagonaliserbar? Motivera Ditt svar!

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris P så att $A = PDP^{-1}$.

3. $\mathcal{P}_n$ är rummet av polynom av grad högst n inklusive nollpolynomet.

   (a) Visa att polynomen $1 + t, 3 + 2t$ är en bas i $\mathcal{P}_1$ samt bestäm koordinaterna för polynomet $p(t) = 1$ med avseende på denna bas.

   (b) För p och q i $\mathcal{P}_1$ kan man t ex definiera den inre produkten

   $$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\,dt \tag{1}$$

   Låt W vara det delrum av $\mathcal{P}_1$ som genereras av $p(t) = t$, dvs låt $W = \text{Span}\{t\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $p_0(t) = 1$ på W med avseende på den inre produkten (1) samt beräkna avståndet från $p_0(t) = 1$ till W.

4. (a) Bevisa att $x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en hyperbel då $|a| > 1$.

   (b) Hyperbeln $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 1$ skär en av sina symmetriaxlar i två punkter. Bestäm avståndet mellan dessa.

V.G.V!

5. Kolonnrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ är ett delrum $U \subset \mathbb{E}^3$.

(a) Finn en bas i U.

(b) Finn en ortonormal bas i U.

(c) Bestäm det minsta avståndet mellan vektorn $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och U, samt ange den vektor $u \in U$ där det minsta avståndet antas.

6. Ytan Y i $\mathbb{E}^3$ består av alla punkter (x, y, z) som uppfyller ekvationen

$$3x^2 + 4y^2 + 2z^2 + \sqrt{8}xz = 4 \ .$$

Bestäm ytans typ, ytans största avstånd från origo, samt de punkter på ytan där det största avståndet antas. (Punkternas koordinater skall anges i standardbasen.)

7. Låt $x = (x_1, x_2, x_3)$ och $y = (y_1, y_2, y_3)$ vara vektorer i $\mathbf{R}^3$.

(a) För vilka värden på konstanterna a, b och c definierar

$$\langle x, y \rangle = ax_1y_1 + bx_2y_2 + cx_3y_3$$

en inre produkt på $\mathbf{R}^3$? Motivera Ditt svar!

(b) Är det sant att olikheten

$$(x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)(y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2)$$

gäller för alla x och y i $\mathbf{R}^3$? Motivera Ditt svar!

8. Avbildningen $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ ges av $F(p(x)) = xp''(x)$.

(a) Visa att F är linjär.

(b) Finn F:s matris med avseende på standardbaserna i $\mathcal{P}_3$ och $\mathcal{P}_2$.

(c) Finn en bas i F:s nollrum.

(d) Finn en bas i F:s värderum.

(e) Redovisa huruvida dina svar på (c) och (d) stämmer överens med dimensionssatsens påstående.

LYCKA TILL!

Lösningar till tentan 2012-03-07

1. (a) $[T] = \left(T(e_1) \middle| T(e_2) \right) = \left(e_2 \middle| e_1 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(b) $\dim(N(A)) = 3 - \mathrm{rang}(A) = 3 - 1 = 2.$

$$\left.\begin{array}{l} e_1, e_2 \in N(A) \\ e_1, e_2 \text{ är linjärt oberoende} \\ \dim(N(A)) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow e_1, e_2 \text{ är en bas i } N(A).$$

2. (a) För alla $a \in \mathbb{R}$ är $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ symmetrisk, alltså ortogonalt diagonaliserbar enligt Spektralsatsen.

(b) A:s egenvärden är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.
A:s egenrum är $E(1) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, $E(2) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.
Alltså är $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en bas i $\mathbb{R}^2$ så att $Ab_1 = b_1$, $Ab_2 = 2b_2$.

För $P = \left[b_1 \middle| b_2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$ gäller då $P^{-1}AP = D$,

alltså även $A = PDP^{-1}$.

3. $\underline{t} = (1, t)$ är en bas i $\mathcal{P}_1$. Alltså är $\underline{b} = (b_1, b_2) = (1+t, 3+2t)$ en bas i $\mathcal{P}_1$ omm

$T_{\underline{t}\underline{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ är inverterbar. Detta är fallet, då $\det(T_{\underline{t}\underline{b}}) = -1 \neq 0$.

$p(t) = 1 = b_2 - 2b_1$ visar att $[p]_{\underline{b}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $b = \frac{t}{\|t\|} = \sqrt{3}\,t$ är en normerad basvektor i $W = \text{span}\{b\}$, då

$$\|t\|^2 = \langle t,t\rangle = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \|t\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{proj}_W(p_0) = \langle p_0, b\rangle b = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}\,t = \frac{3}{2}t, \quad \text{då}$$

$$\langle p_0, b\rangle = \int_0^1 \sqrt{3}\,t\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$d(p_0, W) = \|p_0 - \text{proj}_W(p_0)\| = \left\|1 - \frac{3}{2}t\right\| = \frac{1}{2}, \quad \text{då}$$

$$\left\|1-\frac{3}{2}t\right\|^2 = \left\langle 1-\frac{3}{2}t, 1-\frac{3}{2}t\right\rangle = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}t-1\right)^2 dt = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}t-1\right)^3\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{8}-(-1)\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{9}{8} = \frac{1}{4}.$$

4. (a) $q(x) = x_1^2 + 2a x_1 x_2 + x_2^2 = x^T A x$ för $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -a \\ -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - a^2 = (\lambda-1+a)(\lambda-1-a)$$

har rötterna $\lambda_1 = 1-a$, $\lambda_2 = 1+a$.

Om $a > 1$ då är $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Om $a < -1$ då är $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Alltså: Om $|a| > 1$, då har A ett positivt och ett negativt egenvärde, vilket betyder att kurvan $K: q(x) = 1$ är en hyperbel.

(b) Enligt (a) har $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Om b_1, b_2 är normerade basvektorer i $E(-1), E(3)$, då är $\underline{b} = (b_1, b_2)$ en on-bas i E^2 så att

$$q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = -y_1^2 + 3y_2^2$$

gäller för alla $x = y_1b_1 + y_2b_2 \in E^2$. I synnerhet är

$$x \in K \iff q(x) = 1 \iff -y_1^2 + 3y_2^2 = 1$$

K:s symmetriaxlar är $E(-1) = \text{span}\{b_1\}$ och $E(3) = \text{span}\{b_2\}$.

$$E(-1) \cap K = \emptyset, \quad \text{medan} \quad E(3) \cap K = \{y_2b_2 \mid 3y_2^2 = 1\} = \{\pm \tfrac{1}{\sqrt{3}} b_2\}.$$

$$d\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}} b_2, -\tfrac{1}{\sqrt{3}} b_2\right) = \left\| \tfrac{1}{\sqrt{3}} b_2 + \tfrac{1}{\sqrt{3}} b_2 \right\| = \left\| \tfrac{2}{\sqrt{3}} b_2 \right\| = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \|b_2\| = \tfrac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}.$$

5. (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{k}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{k}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$U = K(A) = K(B) = \text{span}\{b_1, b_2\}, \quad \text{där} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dessutom är b_1, b_2 linjärt oberoende. Alltså är $\underline{b} = (b_1, b_2)$ en bas i U.

(b) $(c_1, c_2) = GS(b_1, b_2)$ är en on-bas i U. Vi beräknar den:

$$c_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c_2 = \frac{b_2 - (b_2 \cdot c_1)c_1}{\| \text{dito} \|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\| \text{dito} \|} = \frac{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}}{\| \text{dito} \|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $d(w,\mathcal{U}) = d(w,u)$ för $u = \mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(w) = (w\cdot c_1)\,c_1 + (w\cdot c_2)\,c_2$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\2/3\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Alltså är

$$d(w,\mathcal{U}) = \|w-u\| = \left\|\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}\right\| = \frac{2}{3}\left\|\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\| = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

6. Vi skriver $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ istället för (x,y,z). Vänsterledet i Y:s ekvation blir då

$$q(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2\sqrt{2}\,x_1x_3 = x^TAx \quad \text{för } A = \begin{bmatrix}3&0&\sqrt{2}\\0&4&0\\\sqrt{2}&0&2\end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda-3&0&-\sqrt{2}\\0&\lambda-4&0\\-\sqrt{2}&0&\lambda-2\end{vmatrix} = (\lambda-4)\big((\lambda-3)(\lambda-2)-2\big) = (\lambda-4)(\lambda^2-5\lambda+4)$$
$$= (\lambda-4)^2(\lambda-1)$$

har rötterna $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$. Dessa är A:s egenvärden.

Om b_1 är en normerad vektor i $E(1)$ och b_2, b_3 är en on-bas i $E(4)$, då gäller

$$q(x) = y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2 \qquad \forall\, x = \sum_{i=1}^{3} y_i b_i \in \mathbb{E}^3.$$

I synnerhet är $x \in Y \iff q(x) = 4 \iff \frac{y_1^2}{4} + y_2^2 + y_3^2 = 1$.

Alltså är Y en <u>rotationsellipsoid</u> med rotationsaxel $E(1) = \mathrm{span}\{b_1\}$ och radierna $2, 1, 1$.

Största avståndet 2 från origo antas i $E(1) \cap Y = \{\pm 2b_1\} = \left\{\pm \frac{2}{3}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\0\\\sqrt{6}\end{bmatrix}\right\}$.

$$E(1) = N(I-A) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\\sqrt{2}\end{bmatrix}\right\}, \quad b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\0\\\sqrt{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\0\\\sqrt{6}\end{bmatrix}.$$

$$I-A = \begin{bmatrix}-2&0&-\sqrt{2}\\0&-3&0\\-\sqrt{2}&0&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&\sqrt{2}/2\\0&1&0\\-\sqrt{2}&0&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&\sqrt{2}/2\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{cases}x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_3\\ x_2 = 0\end{cases}$$

7. (a) $\langle x,y\rangle = ax_1y_1 + bx_2y_2 + cx_3y_3 = x^T A y$ för $A = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$

definierar en avbildning $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ som är symmetrisk (då A är symmetrisk), additiv och homogen. Den är en

$$\text{inre produkt} \iff A \text{ är positivt definit}$$
$$\iff a>0 \text{ och } ab>0 \text{ och } abc>0$$
$$\iff a>0 \text{ och } b>0 \text{ och } c>0$$

(b) Enligt (a) är $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ en inre produkt på $\mathbb{R}^3$. I det inre produktrummet $(\mathbb{R}^3, \langle\rangle)$ gäller för alla $x, y \in \mathbb{R}^3$ Cauchy-Schwarz olikheten

$$\langle x,y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ (x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3)^2 & & (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)(y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2) \end{array}$$

8. (a) $$\begin{aligned} (F(p+q))(x) &= x(p+q)''(x) \\ &= x(p''+q'')(x) \\ &= x(p''(x) + q''(x)) \\ &= xp''(x) + xq''(x) \\ &= (F(p))(x) + F(q)(x) \\ &= (F(p) + F(q))(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{visar att} \end{aligned}$$

(L1) $\quad F(p+q) = F(p) + F(q) \quad$ gäller

$$
\begin{aligned}
\big(F(cp)\big)(x) &= x\,(cp)''(x)\\
&= x\,c\big(p''(x)\big)\\
&= c\,x\,p''(x)\\
&= c\,\big(F(p)\big)(x)\\
&= \big(c\,F(p)\big)(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{visar att}
\end{aligned}
$$

(L2) $\quad F(cp) = c\,F(p) \quad$ gäller

Då F uppfyller (L1) och (L2) är F linjär.

(b) $\quad A = [F] = \Big([F(1)] \,\Big|\, [F(X)] \,\Big|\, [F(X^2)] \,\Big|\, [F(X^3)] \Big) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, då

$$\big(F(1)\big)(x) = x\,1''(x) = x\,0 = 0$$

$$\big(F(X)\big)(x) = x\,X''(x) = x\,0 = 0$$

$$\big(F(X^2)\big)(x) = x\,(X^2)''(x) = x\,2 = 2x$$

$$\big(F(X^3)\big)(x) = x\,(X^3)''(x) = x\,6x = 6x^2$$

(c) För alla $p = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ gäller att

$$p \in N(F) \iff [p] \in N(A) \iff [p] \in N(T) \iff a_2 = a_3 = 0$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T$$

Alltså är $N(F) = \{ a_0 1 + a_1 X \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{span}\{1, X\}$.

Alltså är $(1, X)$ en bas i $N(F)$.

(d) För alla $q = b_0 1 + b_1 X + b_2 X^2 \in \mathcal{P}_2$ gäller att

$$q \in V(F) \Leftrightarrow [q] \in K(A) \Leftrightarrow b_0 = 0$$

Alltså är $V(F) = \{ b_1 X + b_2 X^2 \mid b_1, b_2 \in \mathbb{R} \} = \text{span}\{X, X^2\}$.

Alltså är (X, X^2) en bas i $V(F)$.

(e) Enligt dimensionssatsen är

$$\dim(N(F)) + \dim(V(F)) = \dim(\mathcal{P}_3).$$

Enligt (c) och (d) är $\dim(N(F)) = 2$ och $\dim(V(F)) = 2$.

$$2 \quad + \quad 2 \quad = \dim(\mathcal{P}_3)$$

stämmer, då $\dim(\mathcal{P}_3) = 4$.