Uppsala Universitet
**Matematiska Institutionen**
Ernst Dieterich, Thomas Erlandsson

2012-06-05
LINJÄR ALGEBRA II
LINJÄR ALGEBRA 1MA722

*Skrivtid: 8.00–13.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng.*

1. (a) Låt $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som definieras som spegling med avseende på planet $x_2 = 0$. Bestäm $T$:s matris i standardbasen.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ definierar en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathrm{x}) = A\mathrm{x}$. Bestäm dimensionen av nollrummet Nul $A$ samt ange en bas i Nul $A$.

2. (a) För vilka värden på konstanten $a$ är $A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ortogonalt diagonaliserbar? Motivera Ditt svar!

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm en diagonalmatris $D$ och en inverterbar matris $P$ så att $A = PDP^{-1}$.

3. $\mathcal{P}_n$ är rummet av polynom av grad högst $n$.

   (a) Visa att polynomen $p_1(t) = 1 - at$, $p_2(t) = a + t$ är en bas i $\mathcal{P}_1$ för alla värden på konstanten $a$ samt bestäm koordinaterna för polynomet $p(t) = 1$ med avseende på denna bas.

   (b) För $p$ och $q$ i $\mathcal{P}_n$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\, dt \tag{1}$$

   Låt $W$ vara det delrum av $\mathcal{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = 1$ och $p_2(t) = t$, dvs låt $W = \text{Span}\{p_1, p_2\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet $p$ på $W$ med avseende på den inre produkten (1) samt beräkna avståndet från $p$ till $W$ där $p(t) = t^2$.

4. (a) Bevisa att $x_1^2 + 4ax_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en ellips då $|a| < \frac{1}{2}$.

   (b) Bestäm största avståndet från ellipsen $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1$ till origo.

V.G.V!

5. (a) Alla vektorer $x$ och $y$ i ett inre produktrum uppfyller triangelolikheten. Återge detta påstående!

(b) Är det sant att olikheten

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2+2(x_2+y_2)^2+3(x_3+y_3)^2} \le \sqrt{x_1^2+2x_2^2+3x_3^2}+\sqrt{y_1^2+2y_2^2+3y_3^2}$$

gäller för alla $x=(x_1,x_2,x_3)$ och $y=(y_1,y_2,y_3)$ i $\mathbb{R}^3$? Motivera ditt svar!

6. Ytan $Y$ i $\mathbb{E}^3$ består av alla punkter $(x,y,z)$ som uppfyller ekvationen

$$-x^2+2y^2+z^2-\sqrt{12}xz=2\ .$$

Bestäm ytans typ, ytans minsta avstånd från origo, samt de punkter på ytan där det minsta avståndet antas. (Punkternas koordinater skall anges i standardbasen.)

7. Avbildningen $F:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_3$ ges av $F(p(x))=x^2p'(x)$.

(a) Visa att $F$ är linjär.

(b) Finn $F$:s matris med avseende på standardbaserna i $\mathcal{P}_2$ och $\mathcal{P}_3$.

(c) Finn en bas i $F$:s nollrum.

(d) Finn en bas i $F$:s värderum.

(e) Redovisa huruvida dina svar på (c) och (d) stämmer överens med dimensionssatsens påstående.

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 + y_2 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $y_1(0)=7$ och $y_2(0)=3$.

*De som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.*

8'. Beräkna $A^n$ för alla udda naturliga tal $n$, då $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

# Lösningar 2012-06-05

1. (a) $\quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ där } s,t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Svar (b). $\dim N(A) = 2$ ; en bas i $N(A)$ är $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ex.vis.

2. (a) För alla värden på a, enligt Spektralsatsen.

(b) A:s egenvärden är 1 och 2.

$$E(1) = N(I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{då} \quad I-A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & \end{pmatrix};$$

$$E(2) = N(2I-A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{då} \quad 2I-A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ & \end{pmatrix}.$$

Matriserna $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ uppfyller $P^{-1}AP = D$, och därmed även

$$A = PDP^{-1}.$$

3. (a) Låt $\underline{t} = (1, t)$ vara standardbasen i $\mathcal{P}_1$. För alla värden på a är matrisen

$$A = \left( [p_1]_{\underline{t}} \middle| [p_2]_{\underline{t}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{inverterbar, då}$$

$$\det(A) = 1 + a^2 > 0 . \quad \text{Därmed är } \underline{p} = (p_1, p_2) \text{ en bas i } \mathcal{P}_1 .$$

Koordinatkolonnen för $p$ i $\underline{p}$ är

$$[p]_{\underline{p}} = T_{\underline{p}\underline{t}} [p]_{\underline{t}} = T_{\underline{t}\underline{p}}^{-1} [p]_{\underline{t}} = A^{-1} [p]_{\underline{t}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} .$$

(b) Först bestämmer vi en on-bas $(b_1, b_2) = GS(p_1, p_2)$ i $W$. Sedan blir

$$\mathrm{proj}_W(p) = \langle p, b_1 \rangle b_1 + \langle p, b_2 \rangle b_2 \quad \text{och} \quad d(p, W) = \| p - \mathrm{proj}_W(p) \| .$$

Uträkning. $b_1 = \dfrac{p_1}{\|p_1\|} = p_1 = 1$, då $\|p_1\|^2 = \langle p_1, p_1 \rangle = \displaystyle\int_0^1 1\, dt = 1$ ;

$$b_2 = \frac{p_2 - \langle p_2, b_1 \rangle b_1}{\| \text{dito} \|} = \frac{t - \frac{1}{2}}{\| \text{dito} \|} = 2\sqrt{3}\left(t - \tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2t - 1) \quad , \text{ då}$$

$$\langle p_2, b_1 \rangle = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{och}$$

$$\left\| t - \tfrac{1}{2} \right\|^2 = \left\langle t - \tfrac{1}{2}, t - \tfrac{1}{2} \right\rangle = \int_0^1 \left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left(t - \tfrac{1}{2}\right)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{12} .$$

Alltså är $(b_1, b_2) = (1, \sqrt{3}(2t-1))$ en on-bas i $W$.

Vidare är $\langle p, b_1 \rangle = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ och

$$\langle p, b_2 \rangle = \int_0^1 t^2 \sqrt{3}(2t-1)\,dt = \sqrt{3}\int_0^1 (2t^3 - t^2)\,dt$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad , \text{ alltså}$$

$$\text{proj}_W(p) = \frac{1}{3}1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{3}(2t-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(2t-1) = \frac{1}{3} + t - \frac{1}{2} = t - \frac{1}{6} \; .$$

Därmed blir $p - \text{proj}_W(p) = t^2 - t + \frac{1}{6}$ , alltså

$$\|p - \text{proj}_W(p)\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36}\right) dt$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{4}t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{36}t \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{-18+16-6+1}{36} = \frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{36-35}{180}$$

$$= \frac{1}{180} \quad , \text{ alltså}$$

$$d(p, W) = \|p - \text{proj}_W(p)\| = \frac{1}{6\sqrt{5}} \; .$$

<u>Svar (b)</u>. $\text{proj}_W(p) = t - \frac{1}{6}$ , $d(p, W) = \frac{1}{6\sqrt{5}}$ .

4. (a) $q(x) = x_1^2 + 4ax_1x_2 + x_2^2 = x^TAx$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2a \\ -2a & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4a^2 = (\lambda-1+2a)(\lambda-1-2a)$$
$$= (\lambda-(1-2a))(\lambda-(1+2a))$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2a$ är $A$:s egenvärden.

$|a| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} > 0 \Rightarrow q(x) = 1$ är en ellips.

(b) Ifall $a = \frac{1}{4}$ är $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Det finns en on-bas i $E^2$ i vilken ellipsens ekvation blir $\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1$. Största avståndet till origo är därmed $\sqrt{2}$.

5. (a) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(b) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ är en inre produkt på $\mathbb{R}^3$. Triangelolikheten har då formen

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2 + 2(x_2+y_2)^2 + 3(x_3+y_3)^2} = \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} = \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| =$$
$$= \sqrt{\langle x,x \rangle} + \sqrt{\langle y,y \rangle} =$$
$$= \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2}$$

<u>Svar (b).</u> <u>Den påstådda olikheten gäller för alla</u> $x, y \in \mathbb{R}^3$.

6. $Y: \quad q(x) = 2$

$$q(x) = x^T A x, \quad \text{där } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-4)$$

$$= (\lambda-2)^2(\lambda+2)$$

$A$:s egenvärden är $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \; \lambda_3 = -2$.

Det finns en on-bas $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\mathbb{E}^3$ i vilken $Y$:s ekvation blir

$$2y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2 = 2 \quad , \text{ dvs.}$$

$$Y: \quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$$

Alltså är $Y$ en enmantlad rotationshyperboloid.

$Y$:s minsta avstånd från origo är $1$, då

$$\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 + 2y_3^2 \geq 1 ,$$

och minsta avståndet antas då $y_3 = 0$, dvs. i punkterna

$$x = y_1 b_1 + y_2 b_2 \quad \text{med } y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Härvid är $b_1, b_2$ en on-bas i egenrummet $E(2)$ till $A$. Vi beräknar den.

$$2I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2) = N(2I - A) = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}t \\ s \\ t \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{a_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}}_{a_2} \Big\}.$$

$(b_1, b_2) = GS(a_1, a_2)$ : $\quad b_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$b_2 = \frac{a_2 - (a_2 \cdot b_1)\, b_1}{\| \quad \text{dito} \quad \|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - 0}{\| \text{dito} \quad \|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u> <u>$Y$ är en enmantlad rotationshyperboloid</u>.

<u>$Y$:s minsta avstånd från origo är 1.</u> <u>Det antas i punkterna</u>

$$x = y_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} y_2 \\ y_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} y_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\text{med}} \;\; y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

7. (a) $F(p+q) = F(p) + F(q)$ och $F(cp) = c\,F(p)$ gäller då $(p+q)' = p' + q'$ och $(cp)' = cp'$.

(b) $$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) $(1)$ är en bas i $N(F)$.

(d) $(X^2, X^3)$ är en bas i $V(F)$

(e) Dimensionssatsen påstår att $\dim(N(F)) + \dim(V(F)) = \dim(\mathcal{P}_2)$.

Enligt (c) och (d) är $\dim(N(F)) = 1$ och $\dim(V(F)) = 2$.
Dessutom är $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$. Dimensionssatsen antar alltså formen $1 + 2 = 3$, vilket stämmer.

8. $y' = Ay$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Med $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ gäller

$S^{-1}AS = D$. Vi sätter $y = Sz$ och $y' = Sz'$. Då är

$$y' = Ay \iff Sz' = ASz$$

$$\iff z' = S^{-1}ASz = Dz$$

$$\iff \begin{cases} z_1' = -z_1 \\ z_2' = 3z_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z_1 = c_1 e^{-x} \\ z_2 = c_2 e^{3x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \\ c_1 e^{-x} - c_2 e^{3x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u> $\begin{cases} y_1 = 5e^{-x} + 2e^{3x} \\ y_2 = 5e^{-x} - 2e^{3x} \end{cases}$

8'. Med $S$ och $D$ som i uppgift 8 gäller $S^{-1}AS = D$. För alla $n \in \mathbb{N}$ är då

$$S^{-1}A^nS = (S^{-1}AS)^n = D^n$$

$$\Rightarrow \quad A^n = SD^nS^{-1} \underset{n\text{ udda}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3^n \\ -1 & -3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+3^n & -1-3^n \\ -1-3^n & -1+3^n \end{pmatrix}$$

<u>Svar.</u> $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1+3^n & -1-3^n \\ -1-3^n & -1+3^n \end{pmatrix}$ <u>gäller för alla udda</u> $n \in \mathbb{N}$.