Uppsala Universitet
Matematiska Institutionen
Ernst Dieterich, Thomas Erlandsson

2013-03-11
LINJÄR ALGEBRA II
LINJÄR ALGEBRA 1MA722

Skrivtid: 14.00–19.00. Inga hjälpmedel förutom skrivdon. Lösningarna skall åtföljas av förklarande text. Varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Den som är godkänd på duggan 2013-02-15 får hoppa över den första uppgiften.

1. (a) Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som definieras som moturs rotation omkring origo med vinkeln $\frac{\pi}{4} = 45°$. Bestäm T :s matris i standardbasen.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ definierar en linjär avbildning $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ genom $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Bestäm en bas i nollrummet Nul A.

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris P så att $A = PDP^{-1}$.

   (b) Bevisa att matrisen $A = \begin{bmatrix} a & 4 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar för alla värden på a. Är matrisen ortogonalt diagonaliserbar för något värde på a? Motivera ditt svar.

3. $\mathcal{P}_n$ är rummet av polynom av grad högst n.

   (a) U är det delrum av $\mathcal{P}_2$ vars polynom uppfyller $p(1) = 0$. Bestäm en bas i delrummet U.

   (b) För p och q i $\mathcal{P}_2$ kan man t ex definiera den inre produkten

$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \tag{1}$$

   Låt W vara det delrum av $\mathcal{P}_2$ som genereras av $p_1(t) = t^2$, dvs låt $W = \text{Span}\{p_1\}$. Bestäm den ortogonala projektionen av polynomet p på W med avseende på den inre produkten (1) där $p(t) = 1$.

4. (a) Bevisa att $x_1^2 + 8ax_1x_2 + x_2^2 = 1$ är en hyperbel för alla $|a| > \frac{1}{4}$.

   (b) Hyperbeln $x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2 = 1$ skär en av sina symmetriaxlar i två punkter. Bestäm avståndet mellan dessa.

V.G.V!

5. Ett inre produktrum är ett reellt vektorrum V tillsammans med en inre produkt, dvs en avbildning som tillordnar varje par av vektorer (v, w) ett reellt tal $\langle v, w\rangle$ så att fyra axiom är uppfyllda.

(a) Återge dessa fyra axiom.

(b) Hur definieras vinkeln α mellan två vektorer v och w i ett inre produktrum V?

(c) Vektorerna v och w i ett inre produktrum V bildar vinkeln $\alpha = 60°$ och har längderna $\|v\| = 2$ och $\|w\| = 3$. Finn $\langle v, w\rangle$, samt $\|v + w\|$.

6. Den linjära operatorn R på $\mathbb{E}^3$ ges som rotation med vinkeln π kring den axel A genom origo som har riktningsvektor $a = (0, 1, 2)$.

(a) Finn en ON-bas $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\mathbb{E}^3$ så att $b_2 \perp a$ och $b_3 \perp a$.

(b) Ange R:s matris i denna bas $\underline{b}$.

(c) Ange R:s matris i standardbasen.

7. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ ges av $F(p) = p + (1 + X + X^2)p'$.

(a) Ange F:s matris med avseende på standardbaserna i $\mathcal{P}_2$ och $\mathcal{P}_3$.

(b) Bestäm dimensionen av F:s kärna. *(Kärna = nollrum.)*

(c) Bestäm dimensionen av F:s bild. *(Bild = värderum.)*

(d) Redovisa huruvida dina svar på (b) och (c) stämmer överens med dimensionssatsens påstående.

(e) Avgör huruvida F är injektiv, surjektiv eller bijektiv.
(Injektiv = one-to-one, surjektiv = onto, bijektiv = isomorphism).

8. Lös differentialekvationssystemet

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

med begynnelsevillkoren $y_1(0) = y_2(0) = 7$.

De som tenterar den gamla kursen 1MA722 kan byta ut uppgift 8 mot uppgift 8' nedan.

8'. Beräkna A^n för alla jämna naturliga tal n, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösningar 2013-03-11

1. (a) $$[T] = \left(T(e_1) \middle| T(e_2)\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

(b) $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $x_1 = -2x_2 - x_3 - 2x_4$; sätt $x_2 = s,\ x_3 = t,\ x_4 = u$.

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2s - t - 2u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \middle| \ s,t,u \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Svar (b). $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en bas i $N(A)$, ex.vis.

2. (a) $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -4 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda+2)(\lambda-2)$ löses av $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2$.

$$E(-2) = N(-2I - A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$-2I - A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ x_1 = -2x_2 \ ;\ \text{sätt } x_2 = t.$$

$$E(2) = N(2I - A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ x_1 = 2x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(-2) \\ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ är en bas i } E(2) \end{array}\right\} \Rightarrow P = \left(b_1 \middle| b_2\right) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

löser $P^{-1}AP = D$, och därmed även $A = PDP^{-1}$.

Svar (a). $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ex.vis.

(b) $0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -4 \\ -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 - 4 = (\lambda - a + 2)(\lambda - a - 2)$ löses av

$\lambda_1 = a - 2, \ \lambda_2 = a + 2.$

Då $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ har 2 olika egenvärden är A diagonaliserbar.

Däremot är A inte för något värde på a ortogonalt diagonaliserbar.

Bevis. Om A är ortogonalt diagonaliserbar, då finns S ortogonal och D diagonal så att

$$S^T A S = D \Rightarrow A = SDS^T$$

$$\Rightarrow A^T = (SDS^T)^T = (S^T)^T D^T S^T = SDS^T = A$$

$\Rightarrow A$ är symmetrisk, vilket inte är fallet för något $a \in \mathbb{R}$. $\square$

3. (a) För varje $p = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2$ gäller att

$$\begin{aligned} p \in U &\Leftrightarrow p(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_0 = -a_1 - a_2 \\ &\Leftrightarrow p = (-a_1 - a_2)1 + a_1 X + a_2 X^2 \\ &\Leftrightarrow p = a_1(-1 + X) + a_2(-1 + X^2) \\ &\Leftrightarrow p \in \operatorname{span}\{-1 + X, -1 + X^2\} \end{aligned}$$

Alltså är $U = \operatorname{span}\{-1+X, -1+X^2\}$. Dessutom är polynomen $-1+X, -1+X^2$ ej proportionella, alltså linjärt oberoende.

Svar (a). $-1+X, -1+X^2$ är en bas i U, ex. vis.

(b) $W = \text{span}\{X^2\}$ har dimension 1. Alltså är $b = \dfrac{X^2}{\|X^2\|}$ en on-bas i W, och

$$\text{proj}_W(p) = \langle p, b\rangle b = \langle 1, \tfrac{1}{\sqrt{2}}X^2\rangle \tfrac{1}{\sqrt{2}}X^2 = \tfrac{1}{2}\langle 1, X^2\rangle X^2 = \tfrac{1}{2}\,2X^2 = X^2,$$

då $\|X^2\|^2 = \langle X^2, X^2\rangle = (-1)^2(-1)^2 + 0^2 0^2 + 1^2 1^2 = 1+0+1 = 2 \Rightarrow \|X^2\| = \sqrt{2}$

och $\langle 1, X^2\rangle = 1\cdot(-1)^2 + 1\cdot 0^2 + 1\cdot 1^2 = 1+0+1 = 2$.

<u>Svar (b).</u> $\text{proj}_W(1) = X^2$.

4. (a) Kurvan $K: x_1^2 + 8a x_1 x_2 + x_2^2 = 1$ är en hyperbel om vänsterledets kvadratiska form

$$q(x) = x_1^2 + 8a x_1 x_2 + x_2^2 = x^T A x, \quad \text{med } A = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 4a & 1 \end{pmatrix},$$

har signaturen $\text{sign}(q) = (1,-1)$, dvs. om A har ett positivt och ett negativt egenvärde.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4a \\ -4a & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - (4a)^2 = (\lambda-1+4a)(\lambda-1-4a)$$

löses av $\lambda_1 = 1-4a$, $\lambda_2 = 1+4a$.

$$|a| > \tfrac{1}{4} \iff a < -\tfrac{1}{4} \text{ eller } a > \tfrac{1}{4}.$$

Om $a < -\frac{1}{4}$, då är $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 < 0$.

Om $a > \frac{1}{4}$, då är $\lambda_1 < 0$ och $\lambda_2 > 0$.

<u>Vi har visat</u>: <u>Om</u> $|a| > \frac{1}{4}$, <u>då har</u> A <u>ett positivt och ett negativt egenvärde</u>. <u>Alltså är</u> K <u>en hyperbel</u>.

(b) För $a = 1$ är $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 5$. Om b_1, b_2 är normerade vektorer i $E(-3), E(5)$, då gäller

$$q(x) = x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2 = -3y_1^2 + 5y_2^2 \qquad \forall x = y_1 b_1 + y_2 b_2 \in \mathbb{E}^2.$$

Hyperbeln $K: -3y_1^2 + 5y_2^2 = 1$ skär y_2-axeln i punkterna $(y_1, y_2) = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{5}})$.

Avståndet mellan dessa är $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

5. (a) (IP1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(IP2) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

(IP3) $\langle cv, w \rangle = c\langle v, w \rangle$

(IP4) $\langle v, v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0$

(b)

$$\alpha := \begin{cases} \cos^{-1}\left(\dfrac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right) & \text{om } v \neq 0 \text{ och } w \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{om } v = 0 \text{ eller } w = 0 \end{cases}$$

(c) $$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\,\|w\|} = \cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \langle v, w \rangle = \frac{1}{2}\|v\|\,\|w\| = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 3 = 3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \\ &= 4 + 6 + 9 = 19 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \|v+w\| = \sqrt{19}$$

Svar (c). $\langle v, w \rangle = 3$, $\|v+w\| = \sqrt{19}$.

6. (a) $b_1 = \frac{a}{\|a\|}$ och $(b_2, b_3) = GS(a_2, a_3)$ duger, om (a_2, a_3) är en bas i $A^\perp$.

Vi väljer $a_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ och får $b_1 = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $b_3 = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$.

(b) $$[R]_{\underline{b}} = \left([R(b_1)]_{\underline{b}} \,\middle|\, [R(b_2)]_{\underline{b}} \,\middle|\, [R(b_3)]_{\underline{b}}\right) = \begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$$

(c) $$[R] = T_{\underline{e}\underline{b}}\,[R]_{\underline{b}}\,T_{\underline{b}\underline{e}} = T_{\underline{e}\underline{b}}\,[R]_{\underline{b}}\,T_{\underline{e}\underline{b}}^T$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & \frac{-2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{-1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

7. (a) Standardbaserna i $\mathcal{P}_2$ och $\mathcal{P}_3$ är $\underline{X} = (1, X, X^2)$ och $\hat{\underline{X}} = (1, X, X^2, X^3)$.

$$A = [F]_{\hat{\underline{X}}\underline{X}} = \left([F(1)]_{\hat{\underline{X}}} \,\middle|\, [F(X)]_{\hat{\underline{X}}} \,\middle|\, [F(X^2)]_{\hat{\underline{X}}}\right) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, \quad \text{då}$$

$$F(1) = 1 + (1+X+X^2)1' = 1 + (1+X+X^2)0 = 1,$$

$$F(X) = X + (1+X+X^2)X' = X + (1+X+X^2)1 = 1 + 2X + X^2,$$

$$F(X^2) = X^2 + (1+X+X^2)(X^2)' = X^2 + (1+X+X^2)2X = 2X + 3X^2 + 2X^3.$$

(b) $\dim(\ker(F)) = \dim(N(A)) = 3 - \mathrm{rang}(A) = 3-3 = 0$, då

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix}.$$

(c) $\dim(\mathrm{im}(F) = \dim(K(A)) = \mathrm{rang}(A) = 3$.

(d) Enligt dimensionssatsen gäller $\dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{im}(F)) = \dim(\mathcal{P}_2)$,
vilket enligt (b) och (c) blir till $0 + 3 = \dim(\mathcal{P}_2)$,
och detta stämmer då $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$.

(e) $\dim(\ker(F)) = 0 \Rightarrow \ker(F) = \{0\} \Rightarrow$ F är injektiv.
$\dim(\mathcal{P}_2) < \dim(\mathcal{P}_3) \Rightarrow$ F är ej surjektiv $\Rightarrow$ F är ej bijektiv.

8. Systemet kan skrivas som matrisekvation $y' = Ay$, med $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$S^{-1}AS = D$ löses av $S = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -2 & \\ & 5 \end{pmatrix}$, ex.vis

$z' = Dz$ löses av $\begin{cases} z_1 = c_1 e^{-2x} \\ z_2 = c_2 e^{5x} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $y' = Ay$ löses av $y = Sz = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{5x} \\ c_1 e^{-2x} + 4c_2 e^{5x} \end{pmatrix}$

$S\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Svar. $\begin{cases} y_1 = e^{-2x} + 6e^{5x} \\ y_2 = -e^{-2x} + 8e^{5x} \end{cases}$

8'. Med $S = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} -2 & \\ & 5 \end{pmatrix}$ gäller $S^{-1}AS = D$. Detta medför för alla jämna $n \in \mathbb{N}$ att

$$A^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{7}\right)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{n \text{ jämnt}}{=} \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2^n & 3\cdot 5^n \\ 2^n & 4\cdot 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4\cdot 2^n + 3\cdot 5^n & -3\cdot 2^n + 3\cdot 5^n \\ -4\cdot 2^n + 4\cdot 5^n & 3\cdot 2^n + 4\cdot 5^n \end{pmatrix}.$$