UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Erlandsson
Björn Ivarsson
Lars-Åke Lindahl
Mattias Palmér

Deltentamen 1999-10-13

ANALYS MN 1

20 problem till vilka endast svar behöver ges.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $x = -1$ och $x = -3$ ($|a+b|$ är avståndet mellan a och $-b$)

2. $\{x \in \mathbf{R} | x > 1 \text{ eller } x < -1\}$ Vi godkänner $x^2 > 1$.

3. -2

4. 2

5. 2/3

6. 1

7. 1

8. $-4\dfrac{1}{x^5}$

9. $\dfrac{1}{2}(1+\sin x)^{-1/2}\cos x$

10. $-2\sin x\cos x$ eller $-\sin 2x$

11. $y' = -\dfrac{y}{x+2y}$

12. 2

13. $-\dfrac{1}{x}$

14. 0

15. 0

16. $\dfrac{\pi}{2}$

17. $\dfrac{1}{2}$

18. $\dfrac{2x}{1+x^4}$

19. $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

20. $\dfrac{1}{a}$ eller a^{-1}

8 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $y - 2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{8^{2/3}}(x-8)$ som kan förenklas till $x - 12y + 16 = 0$.

2. Kurvan $y = |x+2|$ är inte differentierbar i $x = -2$. Här har funktionen olika värden på höger- och vänsterderivatorna, nämligen +1 respektive -1.

3. Olikheten kan skrivas
$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} < 0.$$
Uttrycket är > 0 för $x > 1$ och växlar tecken vid $x = +1$ och $x = -1$. Alltså gäller olikheten för $-1 < x < 1$.

4. Funktionen blir kontinuerlig i $x = 0$ för $a = 1$. Utnyttja att $\cos 2x$ och $x+a$ är kontinuerliga i origo så $\lim_{x\to 0-} \cos 2x = \cos 0 = 1$ och $\lim_{x\to 0+}(x+a) = a$. Då båda dessa gränsvärden är 1 är alltså $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ som ska vara $= f(0) = \cos 0 = 1$.

5. Låt tangeringspunkten vara $P = (a, a^2)$ där a ska bestämmas. Tangenten genom P har lutningen $y'(a) = 2a$ och tangenten i P genom $(3,5)$ till kurvan har ekvationen $y - 5 = 2a(x-3)$. Villkoret för att tangenten ska gå genom P är att $a^2 - 5 = 2a(a-3)$. Ur denna ekvation finner man $a = 5$ och $a = 1$ och tangenternas ekvationer blir $y - 5 = 10(x-3)$ respektive $y - 5 = 2(x-3)$.

6. $x = \frac{1}{2}(y - \frac{1}{y})$ ger att vi ska lösa $y^2 - 2xy - 1 = 0$ som ger $y = x \pm \sqrt{x^2+1}$. $y > 0$ ger att vi får endast fallet $y = x + \sqrt{x^2+1}$. Definitionsmängden är alla reella tal x.

7. f 1-1 $f'(x) > 0$ för $x < 0$ och $f'(x) > 0$ för $x > 0$ ger att varje gren är 1-1 och eftersom funktionen är kontinuerlig i $x = 0$ är f 1-1 på hela sitt definitionsområde $-\infty < x < 0,\ 0 < x < \infty$. Rita figur.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & x < 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

$f^{-1}(x)$ har definitionsmängden $\{x \in \mathbf{R} | -\infty < x < 1,\ 1 < x < \infty\}$.

8.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \ln|x|}{x} = 0.$$

$f'(x) = 3x^2 \ln|x| + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln|x| + x^2,\ x \neq 0$. OBS! $(\ln|x|)' = \frac{1}{x},\ x \neq 0$.

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \ln|x| + x^2}{x} = 0.$$