UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Erlandsson
Björn Ivarsson
Lars-Åke Lindahl
Mattias Palmér

Övningstentamen inför deltentamen 1999-10-13
ANALYS MN 1

Svar och anvisningar till övningstentamen utdelas separat.
Hjälpmedel på tentamen 1999-10-13: Inget annat än skrivdon.
Maxpoäng: 100 poäng. *Gräns för godkänt*: 45 poäng.

20 problem till vilka endast svar behöver ges.
Varje korrekt svar ger 1 p. Inget svar eller fel svar ger 0 poäng.

1. Lös ekvationen $|x-2|=1$.

2. Ange definitionsmängden för $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$.

3. Vad är värdet av $\tan\dfrac{\pi}{4}$?

4. Beräkna $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

5. Beräkna $\lim_{x\to 1-}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

6. Beräkna $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\tan^{-1}x}{x+\cos x}$.

7. Beräkna $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

8. Låt

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{|x|}, & x\neq 0\\ a, & x=0.\end{cases}$$

Ange a så att f blir kontinuerlig i origo.

9. $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x}$. Beräkna $f'(x)$.

10. $f(x)=(1+2\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}$. Beräkna $f'(x)$.

11. $f(x)=\tan\sqrt{x}$. Beräkna $f'(x)$.

12. $x^3y + xy^3 = 1$. Beräkna y' uttryckt i x och y.

13. Förenkla uttrycket $e^{3\ln\sin x}$.

14. $f(x) = \ln(\ln x)^2$. Beräkna $f'(x)$.

15. Beräkna $\lim_{x\to 0+} x\ln x^2$.

16. Vad är värdet av $\tan^{-1}(1)$?

17. Vad är värdet av $\sin^{-1}(\sin\dfrac{\pi}{4})$?

18. $f(x) = x\tan^{-1}x$. Beräkna $f'(x)$.

19. $f(x) = \sin^{-1}\dfrac{x}{a}$. Beräkna $f'(x)$.

20. Förenkla uttrycket $\sinh\ln a$.

8 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

Varje korrekt behandlat problem ger 10 poäng.

1. Bestäm ekvationen för den räta linje som tangerar kurvan $y = \sqrt{x}$ i $x = 4$.

2. Skissera kurvan $y = |x^2 - 1|$. I vilka punkter är kurvan ej differentierbar? Motivera.

3. Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 0 \\ \cos 3x, & x > 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i $x = 0$. Motivera noggrant.

4. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom $(1, 0)$ och som tangerar kurvan $y = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

5. Låt y definieras som en funktion $y = f(x)$ genom sambandet

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

Bestäm explicit funktionen $f(x)$ och ange dess definitionsmängd.

6. Bestäm konstanterna a och b så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0 \\ x^2 \ln x, & x > 0 \end{cases}$$

blir deriverbar i $x = 0$. Motivera noggrant.

7. Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ 1 + x^2, & x > 0 \end{cases}$$

är 1-1. Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd.

8. Antag att f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[0, 1]$ och att $0 \leq f(x) \leq 1$ för varje x i $[0, 1]$. Visa att det måste existera ett tal c i $[0, 1]$ så att $f(c) = \sin \frac{\pi}{2} c$.