UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Thomas Erlandsson
Björn Ivarsson
Lars-Åke Lindahl
Mattias Palmér

Övningstentamen inför deltentamen 1999-10-13
ANALYS MN 1

20 problem till vilka endast svar behöver ges.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $x = 1$ och $x = 3$ ($|a - b|$ är avståndet mellan a och b)

2. $\{x \in \mathbf{R} | 0 < x < 1,\ 1 < x < \infty\}$

3. 1

4. 2

5. -2 $\quad (x - 1 < 0$ *då* $x \to 1-)$

6. 1 $\quad (\tan^{-1} x$ och $\cos x$ är begränsade)

7. -1 $\quad (\sqrt{a^2} = -a$ då $a < 0)$

8. $a = 0 \quad (f(x) = x,\ x > 0 \quad f(x) = -x,\ x < 0)$

9. $-3\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}$

10. $-\dfrac{1}{2}(1 + 2\sqrt{x})^{-\frac{3}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

11. $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

12. $y' = -\dfrac{y^3 + 3x^2 y}{x^3 + 3xy^2}$

13. $\sin^3 x$

14. $\dfrac{2}{x \ln x}$

15. 0

16. $\dfrac{\pi}{4}$

17. $\frac{}{4}$

18. $\tan^{-1} x + \frac{x}{1+x^2}$

19. $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

20. $\frac{1}{2}(a - \frac{1}{a})$

8 problem till vilka fullständiga lösningar ska redovisas.

SVAR OCH ANVISNINGAR

1. $y - 2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4}}(x-4)$ som kan förenklas till $x - 4y + 4 = 0$.

2. Kurvan $y = |x^2 - 1|$ är inte differentierbar i $x = \pm 1$. Här har funktionen olika värden på höger- och vänsterderivatorna, nämligen +2 och -2.

3. Funktionen blir kontinuerlig i $x = 0$ för $a = 1$. Utnyttja att $\cos 3x$ är kontinuerlig i origo så $\lim_{x \to 0+} \cos 3x = \cos 0 = 1$.

4. Låt tangeringspunkten vara $P = (a, -\frac{1}{\sqrt{a}})$ där a ska bestämmas. Tangenten genom P har lutningen $y'(a) = \frac{1}{2}\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ och tangenten i P genom $(1,0)$ till kurvan har ekvationen $y - 0 = \frac{1}{2}\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}(x-1)$. Villkoret för att tangenten ska gå genom P är att $-\frac{1}{\sqrt{a}} - 0 = \frac{1}{2}\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}(a-1)$. Ur denna ekvation finner man $a = \frac{1}{3}$ och tangentens ekvation blir $y = \frac{3}{2}\sqrt{3}(x-1)$.

5. Eftersom det är övningstenta tar man Adams Calculus och låter sig inspireras av Exempel 2 sidan 214. På deltentan måste man förstås ha skaffat sig egen förmåga till inspiration.

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{(e^y)^2 + 1}{2e^y}.$$

Vi ska därför lösa $(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$ som ger $e^y = x \pm \sqrt{x^2-1},\ x \geq 1$. Till skillnad från Exempel 2 får vi nu två lösningar eftersom $\sqrt{x^2-1} < x$. Vi känner då igen från sidan 215 att den ena funktionen vi funnit, $y = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$, är $\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ x \geq 1$. Men vad representerar den andra lösningen $y = \ln(x-\sqrt{x^2-1}),\ x \geq 1$? Förlänger vi med konjugatet som vanligt får vi $y = -\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ som den andra lösningen, vilket ju är otroligt vackert. Men varifrån kommer det två lösningar? Betrakta figur 3.27 av $y = \cosh x$. Är $y = \cosh x$ inverterbar egentligen? Om vi ändå inverterar, vilket vi ju gjort ovan, vad måste vi då göra? Kan man nu förklara varför det blir två lösningar till vårt problem? Känns fenomenet igen från $y = x^2$ och dess “inverser” $y = \pm\sqrt{x}$?

6. Vi kan först bestämma b så att funktionen bli kontinuerlig vilket är ett nödvändigt villkor för differentierbarhet. Det är klart att $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^2 \ln x = 0$ och $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(ax+b) = b = f(0)$ så f är kontinuerlig i $x = 0$ om och endast om $f(0) = 0$ dvs vi måste ha $b = 0$. Vidare är $f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} h \ln h = 0$ och $f'_-(0) = \lim_{h\to 0-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} a = a$. Alltså $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$ om och endast om $a = 0$. $f'(0)$ existerar alltså om och endast om $a = b = 0$.

7. f 1-1 Antingen kan man visa att f är växande, och därmed 1-1, genom att studera $f'(x)$ eller så visar man att $f(x_1) = f(x_2)$ medför att $x_1 = x_2$.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

$f^{-1}(x)$ har definitionsmängden $\{x \in \mathbf{R} \mid -\infty < x < 1,\ 1 < x < \infty\}$.

8. Ingenting avslöjas nu! Ett liknande problem att inspireras av är Exercise 32 i Section 1.4.